Math. P. 258
Krause

Mathesis pura. Arithmetica. Systemata & methodi 214.

R

Grundlage der Arithmetik

Erſter Theil

Zum Selbſtunterrichte und zum Gebrauche bei Vorleſungen

von

D. Karl Chriſtian Friedrich Krauſe

Mit zwei Kupfertafeln.

Jena und Leipzig
bei Chriſtian Ernſt Gabler
1804.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Vorrede.

Was ich von einer wahrhaft wiſſenſchaftlichen, d. i. *philoſophiſchen* Behandlung der Mathematik denke, und welchen Werth ich in dieſer Beziehung *dieſer* Darſtellung zu geben wünſche, wird die erſte Abhandlung *über den Begriff und die Eintheilung der Mathematik* deutlich genug anzeigen können. Es gereicht unſerem Zeitalter zur Ehre, daſs von dem gebildeten Publikum allgemeiner eingeſehen wird, daſs die Mathematik ohne das Licht der Philoſophie ein leeres und dunkles Formelweſen ſei; als welches ſie auſer dem Lobe des Scharfſinnes (im gewöhnlichen Verſtande) keines verdienen, noch der Philoſophie ſelbſt, insbeſondere der Naturphiloſophie ein taugliches

Organ

Organ sein könne. Wie viel wir hierin von der wiederanerkannten wahren Philosophie, welche sich jetzt allgemeiner zu verbreiten anfängt, insbesondere von den Bemühungen mehrerer vorzüglicher Philosophen zu erwarten haben, ist Jedem bekannt. Diese meine Schrift wird ihren Zweck erreicht haben, wenn sie auf diese Reform der Mathematik auf eine zweckmäſsige Art vorbereitet, und sich durch eine bessere Ansicht, Betrachtung und Anordnung der Elemente der Arithmetik empfiehlt. Ich bin aus den höchsten philosophischen Gründen überführt, daſs eine wahrhaft wissenschaftliche Darstellung der Elemente einzig und allein zu einer ähnlichen Einsicht in die höhere Mathematik führen könne; aber auch umgekehrt: daſs selbst vollendete Elemente nur im vollendeteren Ueberblicke des organischen Ganzen der mathematischen Wissenschaft hervorgehen können. Denn auch diese Wissenschaft ist dem ewigen Gesetze alles Seins und Erkennens unterworfen, daſs das Einzelne vollendet, nur im Ganzen *ist* und erkannt wird. Ich hoffe,

hoffe, nach demſelben Plane, nach welchem dieſer Theil gearbeitet iſt, die geſammte Mathematik, in ſo kurzer Zeit, als nur immer ein ſolches Unternehmen ausgeführt werden kann, abzuhandeln; und dann eine philoſophiſche Mathematik, das heiſst eigentlich, die Mathematik ſelbſt, in ihrer wahrhaften Vollendung, darzuſtellen. Denn in Abſicht auf den wahren Character der Wiſſenſchaft kann allerdings die Mathematik, und muſs vollendet ſein, wiewohl ſie in Abſicht auf die *Vollſtändigkeit* der Betrachtung und das Eindringen in die lebendigſte Tiefe der ewigen innern Organiſationen der Formen aller Art ſtets eine unvollendete Aufgabe bleibt; und nur, wenn ſie, ſo weit ſie gediehen, eine wahrhaft geſunde Bildung iſt, kann ſie in ſich den unendlichen Reichthum harmoniſcher Geſtaltungen der ewigen Formen aller Dinge entfalten und in Schönheit vollenden. Den Titel: Grundlage eines philoſophiſchen Syſtems der Mathematik, werden noch mehr als dieſer, auf den weder allein, noch vorzüglich ſich dieſer Titel bezieht, die folgenden

Theile

Theile rechtfertigen. Denn jedem folgenden Bande werde ich in der angezeigten Absicht auch Erweiterungen der ersten Abhandlung über den Begriff, die Eintheilung und die innere Organisation der Mathematik, insbesondere weitere Betrachtung der wahrhaft mathematischen Erkenntniss und Beweisart vorausschicken. Die Ordnung aber der Materien, wie sie hier befolgt ist, muss auch der des philosophischen Systems zum Grunde liegen.

Dieser Theil der Arithmetik enthält fast alles, was man in Elementen derselben abzuhandeln pflegt, auser der Erklärung der gemeinen Art, Quadrat- und Cubikwurzeln auszuziehen; welches ich darum dem anderen Theile vorbehalten habe, weil es eigentlich zu einem höheren Ganzen der Betrachtung gehört, welches, wegen seines Umfangs in diesen Theil nicht aufgenommen werden konnte. Was etwa dieser noch auser dem gewöhnlichen Inhalte von Elementen der Arithmetik in sich fasse, werden Kenner der-

derselben von selbst finden, und mit Einsicht beurtheilen.

Ich füge nur noch einige Bemerkungen zu bestimmten Sätzen des Buchs hinzu. Der Ausdruck *unendliche oder idealische Verhältnisse*, oder: *a ist eine idealische Vielheit von b* u. s. w. werde so verstanden, dass er sich blos auf die *Incommensurabilität* bezieht.

S. 35 habe ich die gerade Linie als Schema der Arithmetik empfohlen; diess ist nur von der Elementararithmetik zu verstehen; die höheren Untersuchungen der Arithmetik fordern auch ein höheres Schema, nnd es treten dann an die Stelle der geraden Linien die krummen aller Art, wie diess bekannt, gebräuchlich und leicht in seiner Nothwendigkeit einzusehen ist.

S. 68 werden schon in diesem Theile Elemente der Combinationslehre versprochen; diese mussten, um diesen Band nicht zu sehr zu verstärken, für den nächsten arithmetischen Theil verspart werden.

Zu

Zu S. 87, §. 14, werden die weiteren Bestimmungen im nächsten Theile hinzukommen.

S. 108 wird die Gröſse der Vielheit, welche das Vorderglied vom Hintergliede iſt, *Gröſse des Verhältniſſes*, der Kürze wegen, genannt, d. i. eigentlich *Gröſse des Verhältniſſes des Vordergliedes zum Hintergliede.* Denn die *Gröſse des Verhältniſſes* ſelbſt iſt etwas anderes; ſ. §. 29.

Die S. 334 ff. unter A. befindlichen Sätze ſind eigentlich allgemeine Behauptungen; wenn man in $\frac{n}{m}$ unter n und m jeden möglichen Zähler und Nenner verſteht; die Beweiſse ſind auch allgemein geführt.

Ueber das Zeichen I, der Verkettung der Stufenbrüche, welches man hoffentlich paſſende finden wird, als ein Comma, oder bloſe Nebeneinanderſtellung der Stufen, bemerke ich noch, daſs es, wenn nicht das Gegentheil in

den Stufen ſelbſt bemerkt iſt, Nenner und Zähler poſitiv vorausſetzt. Sind Nenner oder Zähler der Stufen —, ſo muſs man dieſs an ihnen bemerken, z. B.

$$\cfrac{2}{3-\cfrac{5}{7+\cfrac{7}{-11}}} \quad \text{hieſse:} \quad \frac{2}{3}\ \mathrm{I}\ \frac{-5}{7}\ \mathrm{I}\ \frac{7}{-11}.$$

Auch könnte man ſich, wie S. 349, wenn das Negative blos den Zähler afficirt, eines ⁄ bedienen, wiewohl dieſs eigentlich nicht nöthig, z. B.

$$\cfrac{1}{-2-\cfrac{5}{11+\cfrac{7}{-3-\cfrac{1}{1}}}} \quad \text{hieſse:} \quad \frac{1}{-2}\ /\ \frac{5}{11}\ \mathrm{I}\ \frac{7}{-3}\ /\ \frac{1}{1}.$$

Der Ausdruck S. 349

$$\cfrac{\mp\alpha}{\mp a\mp\cfrac{\beta}{b\mp\cfrac{\gamma}{c\ldots}}} \quad \text{oder} \quad \frac{\mp\alpha}{\mp a}\ \mathrm{I}\ \frac{\beta}{b}\ \bar{\mathrm{I}}\ \frac{\gamma}{c}\ \bar{\mathrm{I}}.$$

iſt ſo zu verſtehen, daſs ſowohl Nenner als Zähler aller Stufen ſowohl + als — ſein können.

Wie-

Wiewohl ich mir viel Mühe gegeben habe, den Druck überall correct zu erhalten, ſo iſt mir es doch nicht immer gelungen, weil ich bei vielen abgemeſsnen Beſchäftigungen anderer Art, in den meiſten Bogen gar keinen, überhaupt aber gar keinen mathematikverſtändigen Gehülfen bei den Correcturen haben konnte. Ich habe daher alle Druckfehler, die mir beim Durchleſen der abgedruckten Bogen vorkamen, angemerkt, wiewohl *die meiſten* von der Art ſind, daſs ſie ein aufmerkſamer Leſer ſogleich ſelbſt entdecken würde.

Jena, Ende Octobers
1803.

Der Verfaſſer.

Inhalt.

Inhalt.

I.

Ueber den Begriff und Eintheilung der Mathematik.

§. 1. Vorläufige Fragen hierüber, Seite 1—4.

§. 2. Was ist Wissenschaft, S. 4. Zwei Stufen des Erkennens, S. 4. Quellen der gemeinen Erkenntnissart, S. 5. Kein Begriff entspringt aus sinnlicher Anschauung, S. 5. Das gemeine Erkennen muss lebendig anschauen (evident sein) und der Idealität der Begriffe sich bewusst werden, S. 6. So auch die gemeine mathematische Erkenntnissart, S. 7. Aber es giebt noch eine höhere Vollendung der Erkenntniss, S. 8. Beschreibung derselben, S. 9; sie ist die philosophische, S. 10. Auch die Mathematik ist dieser Vollendung fähig und bedürftig, S. 10—11. Dreierlei also zugleich wird vom wahren mathematischen Wissen gefordert, S. 12.

§. 3. Wie kann die Mathematik philosophisch vollendet werden? S. 12—13. Wie soll die Mathematik hier dargestellt werden? S. 14.

§. 4. Begriff der Mathematik, S. 14. Erklärung desselben, S. 14—18.

§. 5. Begriff der Grösse überhaupt, und *stetiger* und *discreter* Grösse insbesondere, S. 19. Wenn wäre die Mathematik dem Umfange nach vollendet? S. 26. *Einziges Axiom der Mathematik*, S. 27—28.

§. 6. Beschreibung der einzelnen Theile (Wissenschaften) der Mathematik, S. 28—30. Erinnerung an die Leser, S. 30.

II.

Grundriſs der Arithmetik,

(erſte Abtheilung).

§. 1. Definition der Arithmetik, S. 31; ſie umfaſst die Natur der ſtetigen und diſcreten Gröſse, S. 31, 32; kann nicht als Zahlenlehre im gewöhnlichen Verſtande definirt werden (*man müſste denn unter Zahl auch idealiſche Vielheiten verſtehen*), S. 32. Andere Ausdrücke derſelben Definition, S. 32.

Natur der Gröſse überhaupt, der ſtetigen ſowohl als der unſtetigen.

§. 2 — §. 4; S. 33 — S. 39.

§. 2. Jede Sphäre von Gröſse iſt *an ſich* unendlich und unermeſslich, ſelbſt alſo nicht groſs, S. 33. Einſchränkung dieſes Satzes, S. 33; doch iſt die ganze unendliche Sphäre nicht in *aller Rückſicht* unendlich, S. 33 — 34. Dieſer Satz iſt das Axiom der Arithmetik, S. 34. Die Arithmetik betrachtet in der Idee und in *abſtracto*, dabei anſchauend ein ſchematiſches Bild in *concreto*, S. 34 — 35. Die gerade Linie iſt für die erſten Betrachtungen der Arithmetik der beſte Schematismus, S. 35. Nur das Endliche iſt groſs, und daher auch klein; abſolute Gröſse, S. 35.

§. 3. Definition des Verhältniſſes, S. 35 — 36. Nur Gröſsen derſelben Art haben Verhältniſs, S. 37. Bezeichnung der Glieder des Verhältniſſes, S. 37.

§. 4. Gleiche und ungleiche Gröſsen, Zeichen dafür, und Eintheilung der Verhältniſſe darnach, S. 38 — 39.

Sätze, welche für die ſtetige und diſcrete Gröſse beſonders, wegen der verſchiedenen Natur derſelben erwieſen werden müſſen.

§. 5 — §. 17, a; S. 39 — S. 94.

§. 5. Begriff *unſtetiger* oder logiſcher *Gröſse*, S. 39 — 40. Eintheilung der Verhältniſſe derſelben, S. 40; Relativität derſelben, S. 40 — 41. Logiſche Gröſsen können auch ſtetige ſein, und

und als solche betrachtet werden, S. 41. Art der Unermeſslichkeit der Sphären logiſcher Gröſsen, S. 41.

§. 6. Begriff *ſtetiger Gröſse*, und Verhältniſs beiderlei Gröſsen zu einander, S. 41 — 42.

§. 7. Das Verhältniſs ſtetiger Gröſsen wird nur angeſchaut, wenn man ein gemeinſames Maſs der Glieder kennt; vorläufiger Begriff endlicher und unendlicher (idealiſcher) Verhältniſſe, S. 43 — 45. Erklärung des Verhältniſſes, S. 44.

§. 8. Unendliche Beſtimmbarkeit ſtetiger Gröſse, ſtetiges und ſprungsweiſes Wachſen und Abnehmen derſelben, S. 45 — 50. Nur ſolche ſtetige Gröſsen haben gegen einander ein Verhältniſs, die durch ſtetiges Wachsthum aus einander werden können, S. 50.

§. 9. Begriff der Zahl; ganze und gebrochne Zahl (S. 51 — 57); Relativität dieſes Begriffs, S. 53. Zahl im Allgemeinen, S. 53. Alle Zahlen werden auf die abſolute Einheit als Hinterglied bezogen, S. 53, 54; urſprünglicher Ausdruck ganzer Zahlen, S. 55. *Zahlen logiſcher Gröſsen*, S. 55 — 56. Bedingung der Anſchauung Zahl, S. 56 — 57. Die Einheit iſt auch Zahl, S. 57.

§. 10. Von jeder ſtetigen Gröſse läſst ſich jede ganze und gebrochne Zahl conſtruiren, S. 57 — 60. Die Reihe der ganzen Zahlen iſt für ſtetige und unſtetige Gröſsen unendlich, S. 58. Alle unendlichviele Reihen gebrochner Zahlen ſind für ſtetige Gröſse unendlich, S. 59; Inwiefern dieſs von logiſchen Gröſsen gilt, S. 60.

§. 11. Definition der Multiplication und Diviſion mit Zahlen, für ſtetige und unſtetige Gröſsen, S. 60 — 65; der Multiplication, S. 60; der Diviſion, S. 61. Entgegengeſetztes Verhältniſs dieſer beiden Operationen und Sätze darüber, S. 63, 64. Erinnerung wegen der unendlichen Verhältniſſe, S. 64 — 65. Multiplication und Diviſion logiſcher Gröſsen, S. 65.

§. 12. Unendliche Theilbarkeit ſtetiger Gröſse überhaupt und nach Zahlen, S. 65 — 66. Es kommt auf die Ordnung dieſer Theile nichts an, S. 66. Rechtfertigung der gemeinen Definition der Arithmetik, S. 66. Bei logiſchen Gröſsen, S. 66.

§. 13, a. Ueber den Begriff und die Wichtigkeit der Combinationslehre; sie ist ein Theil der Mathematik, insbesondere der Arithmetik, S. 67 — 69.

§. 13, b. Betrachtung der Entgegensetzung der Grösen, S. 69 — 87 (am Schema, und im Allgemeinen). Es sind nur 2 Glieder der Entgegensetzung, S. 76. Allgemeine Definition der Addition und Subtraction, nebst Erläuterung, S. 77 — 81. Allgemeine Bedingungen der Entgegensetzung der Grösen, welche philosophisch bewiesen werden müssen, S. 82, 83. Verschiedene Beschaffenheit der entgegengesetzten Sphären ihrer Endlichkeit oder Unendlichkeit nach, S. 84. Entgegensetzung logischer Grösen, S. 85. Erläuterung dieser allgemeinen Betrachtung durch Schulden und Vermögen, S. 85 — 87.

§. 14. Um das Verhältnis der Grösen zu bestimmen, kann auf + und — nicht Rücksicht genommen werden. (Siehe den Zusatz zu diesem §. in der Vorrede), S. 87 — 88.

§. 15. Allgemeine Erklärung der Begriffe des *Ganzen* und der Theile, S. 88 — 90. Summe, Posten, Minuendus, Subtrahendus; Rest, Differenz, S. 90. Aliquoter und aliquanter Theil, S. 91.

§. 16. Welche Dinge überhaupt entgegengesetzt zu nennen sind, S. 92.

§. 17. a mit $\frac{n}{m}$ multipliciren ist $=$ a mit $\frac{m}{n}$ dividiren; und umgekehrt, S. 93; auch bei logischen Grösen, S. 94.

Von nun an wird auf den Gegensatz stetiger und logischer Grösen nicht mehr gesehen.

§. 17, b. Nothwendiges Verfahren, jedes Verhältnis in Anschauung zu bringen und auszudrücken, S. 95 — 136. Allgemeine Beschreibung dieses Verfahrens, S. 94 — 95; allgemeiner Ausdruck desselben, S. 95.

Beweis, dass diess auf keine andere Art geschehen könne, und zuerst von 2 Grösen auszumachen sei, S. 97. Man sucht ein gemeinsames Mass, S. 97.

Beweis zweier Hülfssätze, S. 98 — 99.

Erläu-

Erläuterung des allgemeinen Verfahrens durch schematische Beispiele, S. 99 – 104.

Beweiss, dass die gefundnen Reste immer kleiner werden, und wenn einer den nächstvorigen theile, er alle vorige theile, S. 104 – 106.

Man erhält hierdurch das Verhältniss allemal in kleinsten Zahlen, S. 106.

Weitere Erklärung unendlicher Verhältnisse, Fragen nach ihrer Realität, und dem Beweisse derselben, S. 106 – 107.

Untersuchungen über den Grad der Näherung der gefundenen Zwischenverhältnisse, S. 108 – 129.

Welches Verhältniss ist grösser oder kleiner? S. 108.

Allgemeine Sätze über die Grösse der Verhältnisse überhaupt, und die Veränderung der Grösse derselben, durch allerlei Veränderungen der Glieder, S. 108 – 115.

Betrachtung der Näherungsverhältnisse in bestimmten Beispielen, S. 115 – 118.

Allgemeiner Beweiss, dass die gefundnen Näherungsverhältnisse abwechselnd grösser und kleiner als das Grundverhältniss sind, in der Ordnung, wie sie auf einander folgen, S. 119 – 121.

Allgemeiner Beweiss, dass die gefundnen Näherungsverhältnisse, wie sie folgen, ihrem Grundverhältnisse immer näher kommen, S. 121 – 129.

Anwendung dieses Lehrsatzes auf unendliche Verhältnisse, S. 129 – 132.

Eintheilung der Verhältnisse der Art und der Grösse nach, S. 132 – 136.

§. 18. Wodurch ist ein jedes Verhältniss bestimmt? S. 136. Ausdruck dieser Bestimmtheit, Exponent des Verhältnisses, S. 137 – 138. Entstehung der Glieder des Verhältnisses aus dem Exponenten, S. 138 – 142. Exponent unendlicher Verhältnisse, S. 142 – 143.

§. 19. Ganz allgemeine Erklärung der Multiplication und Division, S. 143 – 146. Durch beide Operationen kann man ein

so

ſo Groſses und ein ſo Kleines erhalten als man immer will, S. 146. Wodurch und wie wird die Gröſse des Products und des Quotienten beſtimmt, S. 146 — 147. Allgemeiner Beweiſs, daſs a mit einer Vielheit multipliciren = iſt a durch die umgekehrte Vielheit dividiren, und umgekehrt, S. 148 — 149.

§. 20. Unterſuchung über kleinere Maſse, als das nach 17, b gefundne gröſste, S. 149 — 155; ein ſolches muſs *ein* aliquoter Theil vom gröſsten Maſse ſein, S. 154; daſſelbe Verh. kann auf unendlich vielerlei Art dargeſtellt werden, S. 155. Ueber andere gemeinſame Maſse auſer irgend einem gegebnen, S. 155.

§. 21. Wenn das Verhältniſs von 2, 3, 4....n Gröſsen gefunden werden ſoll, S. 156 — 168; a) *Von* 3 *Gröſsen*, S. 156 — 167; Rückſicht auf Commenſ. oder Incommenſurabilität der 3 Gröſsen, S. 158 — 167; vermittelſt 8 *Sätze über Commenſ. und Incomm. dreier Gröſsen überhaupt*, S. 158 — 166; b) *von* 4 *Gröſsen*, S. 167; c) von n Gröſsen, S. 168.

§. 22. Betrachtung der Veränderung des Verhältniſſes, durch allerlei Veränderungen ſeiner Glieder, S. 168 — 181; im allgemeinen, S. 169 — 179; wenn das Verändernde die Glieder ſelbſt ſind, S. 179. Alle Verhältniſſe laſſen ſich auf die Form $1 \,..\, 1 \overline{+} p$ und $1 \overline{+} p \,..\, 1$ bringen, S. 180.

§. 23. Allgemeine Betrachtung der Proportion, S. 181 — 190. Genetiſche Erklärung und Bedingungen der Proportion, S. 181 — 183. Verſchiedener Ausdruck derſelben, S. 184. Eintheilung derſelben in ſtetige und diſcrete, S. 185 — 186; endliche und unendliche, S. 186. Allgemeine Sätze über Proportion und ihre weſentlichen Merkmale, S. 186 — 190.

§. 24. Wodurch die Glieder der diſcreten Proportion beſtimmt ſind, und wie man aus dreien gegebnen das vierte findet, S. 190 — 192. (Bemerkung über den doppelten Gebrauch der Buchſtaben, S. 193.)

§. 25. Betrachtung der ſtetigen Proportion, S. 193 — 199.

§. 26. Beſtimmungen der Proportion durch Veränderung ihrer Glieder, S. 199 — 223. Veränderungen durch Verſetzung, S. 200 — 201; Veränderungen der Glieder ſelbſt; wobei das Verändernde allgemein betrachtet wird, S. 202 — 213; aber auch die Glieder ſelbſt ſein kann, S. 213 — 222. Proportionen die

die aus einem einzigen Verhältniſſe abgeleitet werden, S. 222 — 223.

§. 27. Multiplication mit + und — Gröſsen, S. 223 — 226.

§. 28. Auf Ordnung der Factoren kommt nichts an, wohl aber auf die des Diviſor und Dividendus, S. 226 — 228.

§. 29. Vom Verhältniſs der Verhältniſſe, S. 228 — 244. Zuſammenſetzung (Addition) der Verhältniſſe, S. 228. B. Von der Subtraction der Verhältniſſe, S. 236 — 239. C. Vom Verhältniſs der Verhältniſſe, S. 239 — 242. D. Von Multiplication und Diviſion der Verhältniſſe, S. 242 — 243. E. Satz, die Veränderung der Proportionen betreffend, S. 243 — 244.

§. 30. Von einer Gröſse aus ein Verhältniſs ſetzen und wegnehmen, S. 244 — 246.

§. 31. Von den Reihen durch Verhältniſſe, S. 246 — 265. A. Einfachſte Art dieſer Reihen, Reihen der *ganzen* Potenzen jeder Wurzel, S. 247 — 264. B. Von den negativen *ganzen* Potenzen, S. 252 — 256. C. Doppelt unendliche Reihe der ganzen poſitiven und negativen Potenzen, S. 256 — 257. D. Das Wurzelverhältniſs kann ein endliches oder idealiſches ſein, S. 257 — 258. E. Allgemeine Behauptungen für die unendlichen ganzen Potenzenreihen jeder möglichen Wurzel, S. 258 — 264. F. Von den unendlicherlei andern Reihen, S. 264.

§. 32. *Von den Zahlenſyſtemen, und den 4 Rechnungsarten nach denſelben.* S. 265 — 299. A. von der Bezeichnung aller ganzen Zahlen, S. 266 — 273; B. aller gebrochnen Zahlen in jedem Syſteme; ganz genau oder in endloſer Näherung, Syſtemsbrüche, S. 273 — 279. C. Vier Rechnungsarten, nach beliebigem Syſteme, S. 279 — 299; Addition, *S.* 279 — 280; Subtraction, 280 — 282; Multiplication, S. 282 — 285; Diviſion, S. 285 — 299. Alle gemeine Brüche in decadiſche zu verwandeln, S. 292 — 296.

§. 33. Conſtruction der Wurzel der Reihen aus einem Gliede und den das Glied beſtimmenden Verhältniſſen und umgekehrt, S. 300.

§. 34. Allgemeine Betrachtung der Potenzen, S. 301 — 307.

§. 35. Von den Logarithmen und logarithmiſchen Syſtemen, S. 307 — 315.

§. 36.

§. 36. Vom arithmetischen Verhältniss und Proportion, S. 315 — 322. Erklärung des Unterschiedsverhältnisses, S. 315 — 316. A. Eigenschaften und Veränderungen des Unterschiedsverhältnisses, S. 316 — 318. B. Erklärung und Eigenschaften der Unterschiedsproportion, S. 318 — 320. Veränderungen derselben, S. 320 — 322.

§. 37. Reihen durch Unterschiedsverhältnisse, oder: arithmetische Reihen, S. 322 — 324.

§. 38. Von den Brüchen aller Art, S. 324 — 351. Allgemeine Eigenschaften der Brüche, S. 324 — 330. Eintheilung der Brüche, S. 330 — 333. A. Jeder Bruch läfst sich auf einen einfachen bringen, S. 333 — 334. B. Aufgaben über einfache Brüche, S. 334 — 337. C. Ueber die gebrochnen Brüche, S. 337 — 341. D. Ueber die Stufenbrüche, S. 341 — 350. E. Alle Brüche können in Systemsbrüche verwandelt werden, S. 350 — 351.

§. 39. Allgemeine Sätze über Division, und Ausdrückung der Verhältnisse durch Stufenbrüche u. s. w. S. 351. A. Zwei mögliche Ansichten der Division, S. 351 — 358. B. Das Verfahren in 17, b ist eine verkettete Division, und läfst sich in einem Stufenbruche ausdrücken, S. 358 — 362. Das gröfste gemeine Mafs für Zahlen zu finden, und Brüche auf kleinste Benennung zu bringen, S. 363 — 365. Eine andere Art den Werth jedes Stufenbruches auszudrücken, S. 366 — 367. Decimalbrüche in gemeine zu verwandeln, S. 367 — 368. C. Jedes Verhältnifs in einem Stufenbruche zu geben, S. 368 — 372. D. Alle Stufenbrüche auf die Form $n + \frac{1}{a} \; \mathrm{I} \; \frac{1}{b} \; \mathrm{I} \; \ldots .$ zu bringen, S. 372 — 375. E. Jede Gröfse kann gegen die Einheit in einem Stufenbruche gegeben werden, S. 375 — 376.

§. 40. Werth der Brüche $\frac{0}{0}$, $\frac{n}{0}$ u. dgl. $\frac{-a}{b}$, $\frac{a}{-b}$ u. dgl. *S.* 377 — 379.

§. 41. Allgemeine Betrachtung aller Fälle der Multiplication und Division, *S.* 379 — 382.

S. 103. steht 1 für I. S. 50, 10 v. u. für *Einheit*, liefs *Einheit ganzemale.*

I.

Uiber den Begriff und die Eintheilung der Mathematik.

Die Mathematik ist Wissenschaft von der Grösse, überhaupt sowohl, als auch der Grössen aller Art, insofern sie Grössen sind. Diese Wissenschaft führt zur Kunst Grössen aller Art, insofern sie überhaupt vergleichbar sind, durcheinander zu bestimmen oder auszumessen; daher auch diese Wissenschaft häufig Messkunst genannt worden ist, wiewohl die Messkunst blos ihr Resultat, nicht ihr höchster Zweck ist. Grösse aber wird gemeinhin so erklärt: sie sei die Eigenschaft, vermöge welcher ein Ding vermehrt oder vermindert werden könne. Damit aber nicht etwa Jemand meine, als seien diese Erklärungen für sich selbst klar, vollständig, wesentlich und demnach befriedigend, oder als könne die Mathematik, die Wissenschaft der Wissenschaften in Absicht der Evidenz, auf diesen Grund als ein schönes und würdiges Gebäude errichtet werden; so mag man folgende Fragen vorerst würdigen.

Kommt denn allem, was man denken mag, was ist, und warum und in wiefern kommt ihm Grösse zu?

Was wird eigentlich unter Raum und Zeit angeschaut, oder vielmehr, was ist Raum und Zeit? durch deren Rea-

 lität

lität die Gröſse iſt, und durch deren Anſchauung vermittelt die Anſchauung der Gröſse zu Stande kommt. Warum und in wie weit iſt die Welt in Raum und Zeit? Iſt denn der Raum ſowohl als die Zeit unendlich, ſo wie dieſs durch alle mathematiſche Anſchauungen hindurch beſtändig vorausgeſetzt wird?

Welches iſt das Verhältniſs der Mathematik zur Philoſophie, iſt die erſtere Theil der letzteren, oder umgekehrt? oder liegen beide ganz auſer einander? Welches iſt insbeſondere die Beziehung der Mathematik auf die Naturphiloſophie? Warum verfährt die Natur in ihren ſcheinbar ruhenden Bildungen ſowohl, als in ihren lebenden Bewegungen arithmetiſch-geometriſch? Iſt nicht die Natur *ein* harmoniſches Leben der Zahlen und Verhältniſſe überhaupt? Prägt ſie nicht in den Wundern der Cryſtalliſationen unorganiſcher Körper die regelmäſsigſten Formen der geradlinigen und ebenflächigen, in der Schönheit aber organiſcher Körper die unendlich ſymmetriſchen Geſtalten der krummlinigen und krummflächigen Geometrie aus? hält alſo nicht die Geometrie der Natur die Ideale der Geſtaltung vor, welche die Natur in wundervoller Harmonie in ſich darzuſtellen ewig beſtrebt iſt?

Welches iſt der höchſte, urſprüngliche und vollſtändigſte Ausdruck der gemeinſchaftlichen Aufgabe aller einzelnen Theile oder Wiſſenſchaften der Mathematik, auf was Art läſst ſich dieſe Aufgabe löſen, und welches iſt hiebei die wahre Beweiſsart und Methode?

Welches ſind ferner die ergänzenden Theile der Mathematik, oder, welche einzelne mathematiſche Wiſſenſchaften integriren ihr ganzes Gebiet; welcher iſt der höchſte urſprüngliche und vollſtändige Ausdruck der Aufgabe jeder einzelnen ſolchen Wiſſenſchaft; welches iſt die jeder einzelnen

zelnen eigenthümliche wahre Methode, wie folgen ſie auf einander, wie ſind ſie ſich unter- und beigeordnet? ſind etwa Arithmetik, Geometrie und Dynamik (Kräftelehre), alle dieſe Wiſſenſchaften; oder gehören nur Arithmetik und Geometrie zur Mathematik als Wiſſenſchaft, die wie jede Wiſſenſchaft, als ſolche, von individueller zeitlicher Erfahrung unabhängig iſt?

Man hat die reine Mathematik, das iſt, die Mathematik als Wiſſenſchaft, von der angewandten Mathematik, das iſt von der Anwendung dieſer Wiſſenſchaft auf die äuſsere Erfahrung geſchieden, und in ſo weit mit Recht, als dieſe Anwendung auf die Erfahrung eine eigne Betrachtung erfordert. Bleibt aber nicht die Mathematik, in ſo fern ſie die Erfahrung eingeht, gleich rein, und dieſelbe Mathematik; und ſollte man demnach nicht vielmehr von reiner Mathematik zu ſprechen aufhören, und nur von Mathematik überhaupt reden, ſo wie man von Philoſophie überhaupt ſpricht; da es ſich freilich von ſelbſt verſteht, daſs alle Mathematik, wie alle Wiſſenſchaft, rein, idealiſch und vernünftig iſt.

Es iſt bekannt, daſs die Mathematik, in wie weit ſie jetzt dargeſtellt iſt, von Sätzen ausgeht, welche nicht bewieſen werden, welche man vielmehr als Principien aller mathematiſchen Evidenz beſtimmter Betrachtungen, unbewieſen vorausſetzt. Man nennt dergleichen Sätze Axiome, und die darauf gegründeten urſprünglichſten Conſtructionen Poſtulate. Dergleichen ſind: daſs der Raum und die Zeit, ſo die gerade Linie, die Reihe der ganzen Zahlen, an ſich unendlich und unermeſslich ſei, u. d. m. Bedürfen denn aber dergleichen Sätze nicht eines höheren Beweiſses, d. i. können und ſollen dieſe Axiome nicht Theoreme oder Lehrſätze werden? Sollte nicht wenigſtens nur *ein* Axiom für die ganze Mathematik hinzugelaſſen

 werden?

werden? Oder ſind dieſe Sätze, wiewohl ſie eines ſolchen bedürfen, keines höheren Beweiſses fähig?

Nur wer dieſe, und andere dergleichen Fragen befriedigend zu beantworten im Stande iſt, möchte ein Mathematiker, nicht im alltäglichen, ſondern im wahren und würdigen Sinne genannt werden können. Nur in dieſen Anſchauungen möchte der wahre und ewige Grund erkannt werden, auf den die Mathematik als wahre Wiſſenſchaft erbaut werden kann und ſoll.

2.

Welches iſt denn aber eigentlich das wahre Weſen der Wiſſenſchaft, oder des vollendeten Wiſſens? Um daſſelbe zu erkennen, bemerke die zwiefache Natur des wahren Wiſſens, und die 2 Stufen der Erkenntniſs, die nur im unvollendeten Wiſſen getrennt, im wahren Wiſſen aber in und durch einander ſind. Im wahren Wiſſen nehmlich wird einmal gewuſst: *daſs* Etwas iſt; und ungetheilt zugleich: *warum* etwas ſo iſt. Die erſte Stufe des Erkennens, die, inſofern ſie allein oder vorzüglich betreten wird, das gemeine Erkennen und die gemeine Gewiſsheit bezeichnet, erkennt, daſs Etwas, $= x$, *iſt*, und ſo iſt, wie es iſt; — dieſem Erkennen kommt Evidenz oder Gewiſsheit zu. Die zweite Stufe des Erkennens iſt durch die Beantwortung der Frage bezeichnet: *warum* x ſei, und ſo ſei, wie es ſei; und dieſs *warum* bedeutet eigentlich die Frage, wie denn x als nothwendiger Theil einer höheren Sphäre hervorgehe, und der Natur dieſer höheren Sphäre gemäſs *ſein*, und gerade ſo *ſein* müſſe, wie es zuvor mit Evidenz in der gemeinen Erkenntniſsart gefunden wurde. Laſst uns das Weſen jeder dieſer beiden Erkenntniſsarten noch beſtimmter charakteriſiren, und hieraus zugleich erkennen, daſs ſie beide im wahren Erkennen ungetrennt beſchloſſen ſind, und ſich harmoniſch durchdringen.

Die gemeine Erkenntnifsart erlangt ihre Evidenz, das ift die gewiffe Einficht, dafs x *wirklich* fei, zunächft durch lebendige und beftimmte Anfchauung, welche durch planmäfsige und confequente Reflexion conftruirt und betrachtet wird. Es ift aber x, das ift aller Gegenftand des Wiffens, entweder ein Einzelnes, ins unendliche Individuelles, fowohl Sinnliches der leiblichen Welt, als auch Individuelles der Vernunftwelt (z. B. mein beftimmter Gedanke, als folcher); erfteres fowohl der gemeinhin fogenannten äufseren, als der innern leiblichen Welt der Phantafie; oder x ift ein begriffliches Ganze, ein Begriff, der wiederum blos als ein gemeiner, oder als ein Begriff in feiner Idealität gedacht werden kann. Ein Individuelles, durchaus Beftimmtes der leiblichen Welt wird in feiner Beftimmtheit in den Sinnen erkannt; z. B. diefer beftimmte Baum, der vor mir fteht, durch die Sinne meines Leibes; oder der beftimmte Baum, den ich träume, durch meine inneren Sinne; das ift, keine Erkenntnifs eines individuellen Sinnlichen ohne ganz beftimmte finnliche Anfchauung und felbftthätige Reflexion darauf. Es ift kein Zweifel, dafs alles das, was in den Sinnen fich darftellt, und diefer Darftellung gemäfs gedacht wird, wirklich fei und fo fei, wie es gedacht wird. Ift aber das auf der erften Stufe der Erkenntnifs Erkannte ein begriffliches Ganze, fo kann diefs nicht durch die Sinne, als folche, erkannt werden; denn der Sinn giebt immer ein unendlich Beftimmtes, Befonderes, Individuelles, worin zwar das Allgemeine begriffen liegt, jedoch erft durch den, durch die Sinne unbegreiflichen, Act der Vergleichung darin als Allgemeines angefchaut werden mufs. Ein Begriff alfo, wenn er auch nicht als Idee, fondern blos als ein Inbegriff des mehreren Dingen Gemeinfamen angefchaut wird, kommt, als folcher, nicht durch finnliche Erkenntnifs zu Stande, allein, er ift doch, wie Jeder finden kann, mit finnlicher beftimmter Anfchauung unwillkührlich begleitet, und kann ohne folche gar

nicht

nicht gedacht werden; um z. B. das Thier überhaupt, d. i. den Begriff des Thieres zu denken, muſs ich, unwillkührlich, in ſinnlicher innerer Anſchauung ein beſtimmtes, nur nicht völlig ausgebildetes Thier denken, das iſt, ich muſs das Allgemeine des Thieres an einem Bilde, oder Schema, erkennen, welches auſer dem Allgemeinen auch noch mehr oder weniger Beſonderes enthält; ſchaue ich nun dieſen Begriff an, verbunden mit lebendiger ſinnlicher Anſchauung, ſo behaupte ich, daſs er wirklich reell ſei, auch äuſerlich, wenn ich Individuen erblicke, welche in ihrer unendlichen Individualität das Allgemeine jenes Begriffs an an ſich tragen. Gerade ſo, wenn ich den Begriff eines Vernunftweſens denke, muſs ich ein beſtimmtes Vernunftweſen in beſtimmter Handlung und in Leben anſchauen, an deſſen Beſonderem ich das Allgemeine ſeines Begriffs erkenne. Werde ich mir dieſes Begriffs des Vernunftweſen oder des Menſchen in ſeiner Unendlichkeit, Idealität, als einer Idee bewuſst, das iſt, des Menſchen, wie er ſeiner unendlichen Beſtimmung nach im Ideale *iſt*, ſo kann mir dieſe Erkenntniſs nimmermehr aus ſinnlicher Anſchauung irgend eines individuellen Menſchen ſtammen, denn ich weiſs, daſs kein Menſch das ganze *Sein* des Ideals in ſich faſst; allein dennoch muſs ich auch bei dem Gedanken dieſes Ideals einen beſtimmten Menſchen durch Phantaſie ſchaffen, von welchem zwar niemals vollkömmlich gilt, was im Ideale *iſt*, den ich mir aber doch als Schema meiner idealen Anſchauung vor Augen ſtelle. Wenn ich nun gleich z. B. dieſen idealiſchen Begriff des Menſchen mit abſoluter Gewiſsheit auffaſſe, ſo wie mir dieſe Gewiſsheit im *Gewiſſen* aufgedrungen iſt; ſo habe ich doch dieſes Ideal nur auf gemeine Weiſe erkannt, indem ich blos ſagen kann: ſo iſt's, ſo finde ich es, ſo wahr ich lebe. Ehe ich zeige, wie im wahren Erkennen, dieſs evidente Erkennen der Ideale noch höher geſteigert werde, bemerke ich nur noch, daſs ſelbſt das ſinnlich Individuelle, z. B., daſs

dieſer Baum x wirklich vor mir ſtehe, nicht erkannt werden könnte, wenn nicht die Anſchauung der Sinne, und die Reflexion auf dieſelbe begleitet würden von der überſinnlichen Anſchauung der Begriffe. Auch geht hieraus hervor, daſs Niemand ſagen könne, daſs er auch nur auf gemeine Weiſe etwas erkenne, wenn in ſeinem Erkennen nicht zugleich der Begriff, und die den Begriff begleitende ſinnliche Anſchauung ungetrennt vorhanden ſind, ſei es nun bei dieſem Erkennen, wie im gemeinen Leben, zunächſt um das Erkennen des Individuellen, oder, wie für die Speculation, um die Erkenntniſs des Begriffs zu thun.

Dieſer Grad der Erkenntniſs iſt in der gemeinen (das iſt nicht etwa der verächtlichen) mathematiſchen Erkenntniſs am vollendetſten ausgedrückt. Denn von der einen Seite ſind in ihr die vollendetſten, beſtimmteſten und in ihrer Art vollſtändigſten ſinnlichen ſchematiſchen Anſchauungen, entweder äuſerlich oder innerlich entworfen, und durch geſetzmäſsige Reflexion zu Stande gebracht (conſtruirt) und ſtetig weiter beſtimmt; — auf der andern Seite aber werden dieſe Schemen an die beſtimmteſten und vollſtändigſten Begriffe gehalten, um deren Erkenntniſs es eben zu thun iſt, ſo daſs man den Begriff in ſeinem ihm angemeſsnen (adaequaten) ſchematiſchen Bilde (nicht in einer Allegorie) betrachtet, und ſo ungetrennt das Allgemeine (den Begriff) und Beſondere (ſein individuelles Bild) anſchaut. Auch iſt ferner die gemeine mathematiſche Erkenntniſs der Würde nach vollendet, denn alle ihre Begriffe werden oder ſollen es wenigſtens, als Ideen, wie ſie *an ſich* ſind angeſchaut; daſs alſo das Schema niemals, als ſolches betrachtet, der Begriff iſt, wie er an ſich iſt, ſondern nur wie er auf unvollendete Weiſe im Beſondern erreicht iſt; z. B. Niemand hat je die gerade Linie, noch den Kreis, noch die Kugel geſehen, wie ſie an ſich ſind, mit ſinnlichem Auge; denn die ſchematiſche Linie iſt immer

wieder

wieder Körper, nicht Linie, noch weniger als absolut gerade Linie anzuschauen. Der Mathematiker spricht demnach immer vom Ideale, wie es an sich nicht erst *wird*, sondern wie es an sich *ist*, und alle seine Behauptungen gelten also vollkommen, nur vom Ideale, vom Schema (dem Ideirten) aber je genauer, je näher es dem Ideale tritt. Wenn aber gleich das Ideal nicht als solches adäquat im sinnlichen Bilde ausgedrückt sein kann, so darf doch, wie jedes evidente Erkennen, die mathematische Speculation von schematischer Darstellung nicht entblöst sein, und kann es nicht, wie Jedermann finden kann, der es versucht. Diese ihre innere Vollkommenheit, wie sie an Werken des wahren mathematischen Geistes erreicht ist, ist es auch, welche der Mathematik von jeher theils um ihrer selbst willen, theils auch zur Ausbildung bestimmt bildender Phantasie, Reflexion und scharfsinniger Speculation zur Empfehlung gereicht hat. Eine Mathesis, die diese Eigenschaften nicht in sich vereinigt, und in wiefern sie dieselben nicht in sich vollendet vereinigt, ist auch für die gemeine Erkenntnisart unreif und unbefriedigend, sei es nun, dass ihr die Idealität, oder dass ihr die schematische Anschaulichkeit abgeht.

Dass aber die Mathematik, wie Alles, noch einer höheren Erkenntnisart fähig sei, in welcher selbst ihre gemeine Erkenntnisart verklärt wird, und vollendet begriffen ist, wird sogleich deutlich sein, wenn diese Erkenntnisart im allgemeinen zuvor characterisirt ist.

Mit dem Erkennen: *dass* etwas, und *wie* etwas sei, ist immer die Frage verbunden: *warum* es sei und *so* sei, wie es sei, oder: wie aus der nothwendigen Verknüpfung mit Anderem, in einer höheren gemeinschaftlichen Sphäre, x hervorgehe, und wie es gerade in diesem Ganzen, um des Ganzen willen so sein müsse, wie es ist. Es liegt bei

dieser Frage die höchste Vernunftvoraussetzung zum Grunde, dass Alles, was ist, Alles in Allem, alles harmonisch und die höchste Einheit der Welt, die höchste und absolute Sphäre selbst ist; daher auch die Frage, warum x ist, nicht heisst: warum x in der Zeit geworden, sondern wie es *ewig* in der höchsten Einheit des absoluten Weltganzen enthalten ist; — noch auch diese Frage auf irgend eine andere Art beantwortet werden kann, als dass man im Angesichte der höchsten Einheit, des absoluten Universum, und *in* dieser Einheit x als eine zum Ganzen nothwendige untergeordnete Einheit erkennt. Daher auch nicht folgende die Form der wahren Erkenntniss sein kann: x kann nicht sein ohne y, also ist y; aber y wieder nicht ohne z, also ist auch z u. s. f. analytisch ins Endlose (wo x ein Endliches, nicht die höchste Einheit selbst ist); noch auch diese: y, die absolute unendliche Einheit, *ist*; sie kann aber nicht *sein*, ohne dass z aus ihr entspringe, und sich ihr, als auser ihr gelegen, entgegensetze u. s. f. ins Unendliche. Sondern vielmehr ist diese ihre absolute Form: in der absoluten Einheit A, ist, als sie selbst, die untergeordnete, nicht von ihr abgetrennt, sondern *in ihr* existirende Einheit B, C, D. . . . harmonisch begriffen, und die Harmonie der obersten Einheit, ja diese oberste, unendliche, absolute Einheit selbst. Wenn nun, wie diess das an sich Gewisse, das oberste Axiom alles Wissens und Lebens ist, alles das Ganze, durch die Natur des Ganzen *ist*: so kann es selbst in seiner Wirklichkeit, als auf der ersten Stufe der Erkenntniss nicht wahrhaft erkannt werden, ohne dass es zugleich im Ganzen, im Absoluten, als dessen organischer Theil betrachtet werde; woraus deutlich genug ist, dass nur in dem höchsten Erkennen auch die unterste Stufe desselben allein verherrlicht werden könne. Es giebt also auch nur *ein* Axiom, das ist nur ein *an sich* Gewisses, nehmlich das der absoluten und unendlichen Harmonie des absoluten Weltganzen. Ist das höchste Erkennen Philosophie, so folgt

ferner

ferner hieraus, dafs, wie nur eine Welt, fo auch nur eine Weltweisheit (Philofophie) fei, welche von dem Abfoluten, als höchstem und einzigem Axiom und Princip ausgehend, oder vielmehr beftändig und alles innerhalb diefes Princips betrachtend, alles erkennt, wie es als organifcher Theil des Univerfum *an fich* ift, gleich dem Univerfum felbft. Ferner ergiebt fich zugleich, dafs alles, alfo auch die Mathematik, was wahrhaft erkannt fein foll, philofophifch, das ift im Abfoluten, als Theil der *einen* Philofophie erkannt fein müffe; ferner: dafs keine Wiffenfchaft einer einzelnen Sphäre ein Axiom in dem Sinne haben könne, als müffe daffelbe nicht in der Philofophie felbft bewiefen und in ein Theorem verwandelt werden, dafs vielmehr diefe ganze Wiffenfchaft, vermöge ihrer organifchen Natur, die fie mit ihrem Objecte theilt (weil jede Sphäre des Univerfum die organifche Natur des Ganzen an fich trägt), aus *einem* für fie, in ihrer Sphäre, axiomatifchen Princip geboren werde; welches aber felbft erft in Philofophie zu einem wahren und bewiefenen Princip aus und in dem einen Urprincip wiedergeboren werden mufs. Es mufs alfo im wahren Erkennen alles in der Idee des abfoluten Ganzen, und jede einzelne Sphäre in der Idee ihrer felbft, wie diefelbe in der Uridee des Weltganzen *ift*, erkannt und befchreiben werden; das Ganze ift in ihm eher (nehmlich der Würde nach) als der Theil, und der Theil hinwiederum felbft gleicher Natur mit dem Ganzen; das ift: das wahre Erkennen ift, wie die Welt felbft, höchft organifch, harmonifch, fyftematifch und *eines*.

Um nun zu erfehen, dafs und wie auch die Mathematik auf philofophifche Weife erkannt werden müffe, bemerke man, dafs fie alles das, was als Unermefslich, der finnlichen Conftruction entflieht, als unbewiefen vorausfetzt, ja dafs fie ferner bei allen ihren Beweifsen, die fich fo fchliefsen, „und fo fort ins Unendliche„ fchon die

Uiber-

Uiberführung von der Natur des Unermeſslichen von wo anders hinzubringt. Die Geometrie z. B. muſs es als Axiom behaupten, daſs der Raum, in Rückſicht der Ausdehnung, blos als Raum betrachtet, unendlich und unermeſslich ſei, daſs daher auch eine gerade Linie ins Unendliche und Beliebige verlängert oder verkürzt werden könne; daſs der Raum ins Unendliche theilbar ſei u. ſ. w.; ohne welche Vorausſetzungen alle ihre Beweiſse durch Conſtructionen kraftlos ſind. Wenn ferner in der Arithmetik behauptet wird, daſs die Reihe der ganzen Zahlen unendlich ſei, ſo kann dieſs durchaus in ihr nicht bewieſen werden, ſondern es liegt dieſs in ihrer urſprünglichen Vorausſetzung, daſs alle ſtetige Gröſse an ſich durch jede Einheit aus ihr unermeſslich ſei; wenn endlich in der Arithmetik von unendlichen (incommenſurabeln) Verhältniſſen die Rede iſt, ſo kann die Arithmetik ihre Realität und Natur im Allgemeinen durchaus nicht ergründen, und der vermeinte Beweiſs dafür ſchlieſst ſich mit einem: „und ſo fort ins Unendliche„, wonach eben erſt die Frage iſt. Alle dieſe Vorausſetzungen müſſen und können philoſophiſch, das iſt im Abſoluten, im Weltganzen ſelbſt erkannt werden; daſs z. B. der Raum die unendliche Grenze oder Form der einen Sphäre des Univerſum, der Natur ſei, daſs und warum alſo der Raum in ſeiner Endlichkeit doch unendlich ſein müſſe; daſs das Gleiche von der Zeit gelte; wie weiterhin die Gröſse ewig entſpringe, was die Gröſse ſelbſt ſei u. ſ. w.; daſs die beſtimmte Gröſse, im Verhältniſſe, wiederum ſowohl endlich als unendlich (letzteres nehmlich in incommenſurabeln Verhältniſſen) ſein müſſe; — alles dieſs kann nur in ſeiner Nothwendigkeit durch Philoſophie erkannt werden, und muſs es, wenn zu der Evidenz der Mathematik in beſtimmten Conſtructionen, die wahre Evidenz des Ganzen im Unendlichen und Abſoluten hinzukommen, oder vielmehr, wenn die wahre Evidenz ſelbſt in ihrer Vollendung durch die wahrhaft philoſophiſche Natur der

Specu-

Speculation geſchaffen werden, wenn die Conſtructionen der Mathematik wahrhaft ſpeculative und ſchöne Bedeutung erhalten ſollen. Hierdurch nur werden ſich alle oben aufgelegte Fragen in *einer* Antwort befriedigend löſen, die Formen der Mathematik werden aufhören bloſe Formen zu ſein, ſie werden in ihrer weſentlichen Beziehung zu ihrem Weſen, und in ihrer weſentlichen Nothwendigkeit im Weltganzen erſcheinen, ſo z. B. wird die wahre Bedeutung der krummen Linien einzig aus philoſophiſcher Betrachtung an den Tag kommen.

Zur wahren mathematiſchen Wiſſenſchaft wird alſo ungetheilt dreierlei erfordert, welches eigentlich in ſich eines und das gleiche iſt:

a) organiſche Beziehung und Anſchauung des Conſtruirten im abſoluten Weltganzen;

b) deutliche Anſchauung der beſtimmten zu conſtruirenden Idee; begleitet

c) von beſtimmter, deutlicher, und der Idee adäquater ſchematiſcher Anſchauung.

Oder es muſs die Conſtruction der Mathematik philoſophiſch, idealiſch, ſchematiſch, alles dreies zugleich, in, mit und durcheinander ſein.

3.

Es muſs demnach eine vollendete Darſtellung der Mathematik nothwendig dieſe ganze endlichunendliche Sphäre in der einen unendlichen Sphäre des Weltganzen, philoſophiſch, darlegen, und nur unter dieſer Bedingung kann dieſe Darſtellung die Natur eines ſchönen Kunſtwerks annehmen, vermöge welcher im Endlichunendlichen die abſolute Natur des Univerſum, unendliche Einheit und Harmonie, offenbar werden muſs. Soll aber die Mathematik

phi-

philoſophiſch dargeſtellt werden, ſo muſs der idealiſche Begriff, folglich auch der oberſte Grundſatz (der für ihre Sphäre als das Höchſte und innerhalb ihrer Grenzen Unbeweiſsbare, als *Axiom* erſcheint) derſelben im idealiſchen (das ſoll nicht heiſsen: in dem ſich erſt zeitlich bildenden) Begriffe des Weltganzen und im höchſten und einzigen wahren Princip oder Grundſaze alles Seins uud Wiſſens erkannt werden. Kurz, es wird zur philoſophiſchen Darſtellung der Mathematik erſt ihre Begründung, das heiſst, das unbedingte Erkennen ihrer ganzen Sphäre, und der Einheit derſelben, im Abſoluten, durch die oberſte Speculation der Philoſophie, vorausgeſetzt; durch welche oberſte Speculation das Abſolute ſelbſt, oder die unendliche Einheit aller Einheiten, in ſeiner unendlichen Natur erkannt (nicht begründet oder bewieſen), ſodann in dieſer Einheit alle untergeordnete Einheiten in ihrer Unter- und Beiordnung, in ihrem *an ſich*, oder in ihrer Idee dargeſtellt werden. Durch dieſe im Abſoluten erkannten Ideen ſind eben ſoviel endlichunendliche Sphären gegeben, welche Objecte eben ſo vieler Wiſſenſchaften ſind, und die Grundſätze aller dieſer Wiſſenſchaften in ſich tragen; worunter denn auch die Sphäre und das Princip der Mathematik in ſeinem wahren Weſen und in organiſcher Beziehung zum Weltganzen, und zur Weltbildung in der Zeit, hervortritt. Nur aus der ſo erkannten Idee, oder dem unendlichen Begriffe, der Mathematik, kann eine, dieſer Idee entſprechende Ausbildung ihrer Sphäre, ein wahrhaft wiſſenſchaftliches Syſtem der Mathematik hervorgehen.

Da mir aber eine nicht blos angedeutete, ſondern mit Anſchaulichkeit durchgeführte Darſtellung dieſes höchſten Theils der Philoſophie, den man nicht unpaſſend Wiſſenſchaftslehre, *in dieſer Beziehung*, nennen könnte, zur Zeit nicht bekannt, auch der beſtimmte Zweck dieſes Grundriſſes mir nicht geſtattet, mich jetzt hierin zu verſuchen,

indem

indem dieſer Grundriſs für Solche zunächſt geſchrieben iſt, welche erſt zu mathematiſiren anfangen, ſich vorerſt in evidenter Anſchauung und beſtimmter Richtung der Phantaſie üben, und dadurch ſich, in wieweit dieſs überhaupt möglich, für die wahrhaft philoſophiſche Speculation, die ohne die genannten Eigenſchaften unmöglich iſt, geſchickter machen wollen: ſo werde ich mich begnügen die Mathematik in dieſem Grundriſſe auf die gemeine Art, nur mit vollendeter-ſyſtematiſcher Natur in ihren Elementen darzulegen; ſo zwar, daſs auf ihrer Idee und ihrem höchſten Principe, das als ihr oberſtes, aber einziges, Axiom aufgeſtellt, und ſo gut ausgeſprochen wird, als es für dieſen Standort möglich iſt, das Ganze, ſo weit es möglich in eben der Ordnung gegründet wird, als es auch in der philoſophiſchen Darſtellung geſtellt ſein muſs; wobei ich beſtändig bemerken werde, wo der Mangel einer wahrhaft philoſophiſchen Erkenntniſs der Mathematik am offenbarſten iſt. Man erwarte alſo von der folgenden Darſtellung nicht mehr, als jetzt eben angegeben iſt, und auch dieſs nur in der Vollſtändigkeit und Vollkommenheit, als es der beſtimmte Zweck dieſes Grundriſſes, und die ihm dadurch geſetzten Grenzen und der Grad der Erkenntniſs des Verfaſſers geſtatten.

Zuerſt iſt demnach der unendliche Begriff, oder die Idee der Mathematik axiomatiſch aber evident, darzulegen.

4.

Die Mathematik iſt ſyſtematiſche und ſynthetiſche Anſchauung aller Formen, in welchen ein Endliches aller Art innerhalb ſeiner unendlichen Form ein Endliches Begrenztes iſt, oder wird.

Unter Form wird ſoviel als Grenze verſtanden, durch welche das in ihr Beſchloſsne in ſeiner eigenthümlichen

chen Einheit und Befonderheit ift und erkannt wird. Dem abfoluten Weltganzen kommt daher durchaus keine Form oder Grenze zu, weil es mit abfoluter Gewifsheit fchlechthin unendlich und abfolut gefetzt wird und alfo *ift*. Allein es find im Abfoluten unendlich viele untergeordnete Sphären, oder Einheiten enthalten, welche zwar mit dem Abfoluten von gleicher Natur, in ihm als organifche Theile, ja es felbft find, jedoch nicht das ganze totale Abfolute, fondern jede in ihrer eigenthümlichen Geftalt, Form oder Grenze. Die oberften Sphären der Welt find Natur und Vernunft, die Form der Natur ift Raum, die Form der Vernunft Begriffseinheit, die ihnen gemeinfame Form, in der fie in einander wirken ift die Zeit. So abfolut das Wefen, fo die Form; die Form nicht ohne das Wefen, das Wefen nicht ohne die Form.

Die Formen der genannten Sphären find jede auf die ihr eigenthümliche Art unendlich; denn fie grenzen unendliche Sphären ein, und grenzen fie ab vom fchlechthin unendlichen Abfoluten. Der Raum alfo, die Begriffseinheit, und die Zeit find unendliche Grenzen.

Wären die Sphären diefer Grenzen leer, ohne Mannigfaltigkeit und Bildung, oder: wären in jeder der genannten Einheiten nicht wieder unendlich viele Einheiten fich unter- und beigeordnet, fo würden auch die Formen felbft nicht weiterhin begrenzt werden. Da aber das erftere vielmehr *ift*, fo müffen wiederum die genannten Formen weiter begrenzt werden, oder in Formen der Form eingehen, welche alfo Grenzen der Grenze werden, und fo weiter bis die Begrenzung durch ihre immer tiefer untergeordnete Einheiten herab in fich vollendet ift, und eine durchaus individuelle

duelle Begrenztheit (Individualität) darſtellt. So iſt z. B. der Raum unendliche Grenze, und eben darum auch ſeine erſte Begrenzung, die Fläche unendlich, ſowohl der Ausdehnung als auch der Art nach, da hingegen im unendlichen Raume als ſolchem, durchaus aller Unterſchied der Art nach verſchwindet. Weil nun die Fläche wiederum unendlich iſt, ſo kann und muſs ſie aufs neue begrenzt werden durch Linie, welche ſelbſt wieder als Grenze einer noch unendlichen Grenze, begrenzt werden muſs, auch ſowohl der Ausdehnung als der Art nach unendlich iſt. Die Grenze der nur noch in *einer* Rückſicht, nehmlich der Länge, unendlichen Linie, iſt nun die abſolute Grenze, der mathematiſche Punct, der weder etwas in ſich faſst, noch einen Raum als ſolchen begrenzt. Durch dieſe drei untergeordneten Grenzen iſt die unendliche Grenze des Raums erſchöpft; aber es iſt auch darin die unendliche Mannigfaltigkeit der Individualität jedes endlichen Körpers enthalten, indem die 3 Grenzen Fläche, Linie und Punct an ihm in Vermiſchung ihrer wechſelſeitigen Beſtimmungen nothwendigerweiſe zugleich vorhanden ſind.

Die unendliche Grenze der Zeit wird ebenfalls als ſolche aufs neue begrenzt durch den Moment, wo je 2 Momente, die auſer einander ſind, ein beſtimmtes Endliche von Zeit geben.

Die Form der Vernunft aber als ſolcher, der Begriffseinheit (Einheit des Beſondern und Allgemeinen), wird weiter begrenzt nach innen durch die Form von Genus und Species, wo die Species aufs neue weiter beſtimmbar geſetzt wird, und ſo fort ins Unendliche ohne das Individuum zu erreichen. Jedes Individuum aber iſt, und wird angeſchaut in der Form eines Begriffs.

Es

Es wird demnach das Individuelle aller Art ein solches dadurch, daſs es innerhalb einer vollendeten endlichen Grenze, die in einer unendlichen Grenze liegt, beſchloſſen iſt. Daher kann die unendliche Aufgabe, d. i. der idealiſche Begriff der Mathematik auch ſo ausgedrückt werden:

Die Mathematik iſt ſyſtematiſche und ſynthetiſche Darſtellung der Formen (Grenzen, förmlichen Bedingungen) des Seins und Werdens alles Individuellen.

Oder auch, da der Gehalt in ſo fern er in Form und Grenze iſt, als Eigenſchaft oder Accidenz (nicht als ein Zufälliges) erſcheint:

Die Mathematik iſt ſyſtematiſche und ſynthetiſche Aufzählung und Darſtellung aller Accidenzen, wodurch in allen Sphären der Welt individuelle Endlichkeit iſt und wird.

Durch die Grenzen der untergeordneten Einheiten oder Sphären der Welt, und die aus dem Abſoluten ſtammende Nothwendigkeit dieſe Grenzen zu vernichten, und das, was über die Grenze hinausliegt hereinzunehmen, entſpringt Leben und Bildung im Univerſum, und in ſo fern *iſt* das Univerſum die Zeit, oder in der Zeit (nur nicht *zeitlich*). In allem Bilden oder Organiſiren wird aber die Grenze verändert (jedoch nicht dem Weſen nach), modiſicirt, weiter beſtimmt. Daher *werden* die individuellen Sphären der Welt, alſo auch ihre Formen; daher muſste alſo auch in unſerer Definition der Mathematik geſetzt werden, daſs ſie die Formen betrachte, unter denen Individuelles aller Art ſei, und werde. So iſt zum Beiſpiel die Bewegungslehre die Darſtellung der Formen, unter welchen eine individuelle Entfernung und die dadurch beſchriebne Linie nicht *iſt*, ſondern ſtetig *wird*.

Die Welt ist systematisch, das ist in der unendlichen Idee des Ganzen stehet und lebet alles, daher muſs die Welt auch also erkannt werden. Dieſs zeigt sich auch bei den Formen im Universum. Durch das unendliche *Wesen* der Welt, ist ihre unendliche *Form*; aus der höheren Form stammt ihre weitere Begrenzung; aus dieser wiederum die neue, u. s. f. So müssen also auch die Formen erkannt werden, also systematisch. Wenn aber das Besondere im und am Allgemeinen, die untergeordnete Sphäre in und als organischer Theil der höheren erkannt wird, so wird es synthetisch, das ist eben das Besondere im Allgemeinen *darstellend* erkannt. Daher muſs jede Erkenntniſs, welche *systematisch* ist auch *synthetisch* sein, und es bedeutet an sich beides das Gleiche.

Das Besondere aber kann im Allgemeinen nicht erkannt werden, ohne daſs die lebendige und durch die Speculation geleitete Anschauung wirklich, auf nothwendige Weise, das Betrachtete bestimme, bilde oder construire; z. B wer nicht die weitere Bestimmung der Grenze der Linie durch Phantasie ergreift, und nicht sowohl die gerade als krumme Linie im Bilde entwirft, wird nimmer erfahren, was beide sind. Es ist keine Speculation ohne Construction, und keine wahre und schöne Construction ohne Speculation (oder System) möglich. Daher am vollendetsten der Begriff der Mathematik so kann gefaſst werden:

Die Mathematik ist systematische und synthetische Construction aller endlichen Formen (Grenzen, Accidenzen), in welchen ein Endliches (vollständig Begrenztes, Individuelles) aller Sphären innerhalb seiner unendlichen Form, ein Endliches ist und wird.

5. Jede

5.

Jede endliche Grenze oder Form (innerhalb ihrer unendlichen, deren weitere Grenze ſie iſt) muſs ſowohl der Gröſse (quantitate), als der Art nach (qualitate) weiter begrenzt und beſtimmt werden. Die Weiterbeſtimmung der endlichen Grenzen durch Gröſse iſt allem Begrenzten, ſeine Grenzen mögen der Art nach weiter beſtimmt ſein, wie es ihre Natur auch fordert, auf gleiche Weiſe gemeinſchaftlich; jedoch entſpringt aus dem Weſen der beiden oberſten unendlichen Grenzen der Vernunft - und der leiblichen Welt die einzige Artverſchiedenheit der Gröſse ſelbſt, als ſolcher, daſs nehmlich die Gröſse der unendlichen Begriffseinheit in Genus und Individuum *untheilbar* (quantitas individua ſeu diſcreta), die Gröſse aber der individuellen Natureinheiten, als ſolcher (denn auch dieſe ſtehen freilich unter der Begriffseinheit), nehmlich des Raumes, und der innern Grenzen des Leiblichen (der Kraft) ins *unendliche theilbar* und *ſtetig* (quantitas in infinitum diviſibilis ſ. continua) iſt. Die Weiterbeſtimmung aber der Formen oder Grenzen der Art nach, iſt zwar überhaupt allen Sphären gemeinſam, die beſondere Artbeſtimmung aber aller Grenzen, muſs aus der Natur jeder Sphäre beſtimmt ſein, und durch beſtimmte Conſtruction derſelben durch Phantaſie erkannt werden; die Art alſo der Grenzenbeſtimmung iſt nach Art der unendlichen Form der beſtimmten Sphäre, und durch die Art des Weſens der letzteren verſchieden.

(Dieſe Behauptungen können hier nicht philoſophiſch bewieſen, ſondern nur durch beſtimmte Conſtruction zur Evidenz gebracht werden).

Bemerkt man, wodurch endliche Grenzen weiter beſtimmt und verſchieden ſind, ſo findet ſich, daſs ihre Weiterbeſtimmung und Verſchiedenheit ent-

weder der Art nach oder der Gröſse nach ſei; z. B. die Linie iſt unendliche Grenze der Fläche, welche ſelbſt wiederum unendliche Grenze des Raums in ſeiner Fülle iſt. Dieſe Grenzen als unendliche Grenzen ſind der Art nach verſchieden (ob und in wie fern ſie auch der Gröſse nach verſchieden ſind, davon hernach). Die Linie aber insbeſondere kann und muſs aufs neue begrenzt und beſtimmt werden. Wird ſie der Art nach beſtimmt, ſo entſtehen die beiden Glieder, gerade und krumme Linie, welche nicht der Gröſse nach verſchieden ſind (denn beide ſind gleich unendlich); hieraus entſtehen alſo 2 untergeordnete Begriffseinheiten unter dem Begriff Linie. Wird die Linie durch Gröſse beſtimmt, ſo wird nicht der Begriff, ſondern nur das unter dem Begriff enthaltene, dem Begriffe nach ganz gleiche ſelbſt weiter begrenzt z. B. eine Linie von 2 Fuſs Länge wird durch Gröſse verſchieden von einer, die 3 Fuſs lang iſt. Hier wird die unendliche Grenze ſelbſt, als ſolche, ohne ſie begrifflich weiter zu beſtimmen, begrenzt, und wird durch 2 auſereinanderliegende abſolute Grenzen (Puncte) zu einer endlichen; daher ſage ich auch, ſie ſei groſs, weil ſie ein Reelles dieſer Art, wiewohl ein vollendet Begrenztes, alſo Endliches derſelben, enthält. Wäre ſie die unendliche Linie ſelbſt, ſo wäre ſie nicht groſs; wäre ſie die abſolute Grenze, der Punct, ſo wäre ſie auch nicht groſs. Durch Gröſse alſo wird daſſelbe poſitive Reale im Begriff und der Anſchauung Gleiche, dennoch als Gleiches unterſchieden. Alſo

Gröſse iſt Verſchiedenheit vollendet Begrenzter, Endlicher, Realer, welche innerhalb derſelben unendlichen

chen Grenze, (in derſelben Sphäre) alſo bei abſolut gleicher Art beſchloſſen ſind. Nur alſo endliche Grenzen, und das, was innerhalb endlicher Grenzen liegt, und inſofern dieſs der Fall iſt, ſind groſs. Das Unendliche demnach aller Art, und inſofern etwas unendlich iſt, iſt nicht groſs; auch nicht das Nichts, weil in demſelben nichts liegt, die Form aber ohne Gehalt ſogar Form zu ſein aufhört. Unendliche Grenzen alſo, inſofern ſie unendliche ſind, können nicht durch Gröſse, ſondern ſie müſſen blos der Art nach verſchieden ſein.

Alles Endliche Poſitive, innerhalb ſeiner unendlichen Grenze iſt demnach groſs (ein Quantum) und die Gröſse ſelbſt iſt nur durch ſich ſelbſt, das iſt durch die Beſtimmtheit der Endlichkeit deſſen, was innerhalb derſelben Sphäre liegt, verſchieden, alſo unendlich beſtimmbar, und in dieſer Beſtimmtheit nur durch Vergleichung Endlicher derſelben Sphäre zu erkennen, alſo relativ. Die Beſtimmtheit aber der Gröſse mehrerer Endlicher, als ſolcher, derſelben Sphäre heiſst ihr Verhältniſs. Alſo haben alle Gröſsen derſelben Art gegen einander ein beſtimmtes Verhältniſs, Gröſsen aber verſchiedener Sphären zu einander gar keines (nehmlich kein *Gröſsen*verhältniſs). Weil nun die Beſtimmtheit jeder Gröſse für ſich unendlich beſtimmbar iſt, hiedurch aber Verhältniſse entſtehen, ſo muſs es unendlich viele Verhältniſſe geben. Welche alſo die Mathematik zu betrachten hat.

Es muſs in der Gröſse dennoch eine Artverſchiedenheit ſein, weil jede Form durch die Art ihres Gehaltes, ſelbſt der Art nach beſtimmt werden

den muſs; von welcher Artverſchiedenheit aber in der Gröſse, als ſolcher, eine die andere in ſich enthält (welches Verhältniſs der Verſchiedenheit auch bei der Artverſchiedenheit und bei der Unterordnung der Potenzen der Kräfte, als des Mechaniſchen, Chemiſchen und Organiſchen zu individueller Bildung gefunden wird). Dieſer Unterſchied der Gröſse der Art nach iſt der, der ſtetigen und unſtetigen Gröſse; welcher ſelbſt aus der Artverſchiedenheit der unendlichen Formen der beiden oberſten Sphären der Welt der Vernunft und Natur entſpringt. Die Gröſse nehmlich der Begriffseinheit beſteht in dem ſynthetiſchen Immer - weiter - beſtimmen der Merkmale und in der Anſchauung der Unterordnung der Begriffe. Jeder Begriff aber iſt eine organiſche, untheilbare Einheit, die nicht in mehrere Theile getheilt werden kann, ohne zerſtört zu werden. Dieſe Begriffseinheiten alſo, welche in- und untereinander enthalten ſind, können nicht zerſtückelt oder durch Aneinanderhäufung (durch Coacervation) zu einem höheren Ganzen verknüpft werden, ſondern die niedere kann nur, als in der Höhern (involutoriſch) erkannt werden, weil ſie alſo in derſelben *iſt*. — Was aber von den Begriffseinheiten gilt, gilt auch von allen unendlich beſtimmten Individuen, inſofern ſie begrifflich betrachtet, das iſt einem Begriffe ſubſumirt werden, ja dieſer unendlich weiter beſtimmte Begriff ſelbſt, im Beſonderen, ſind. So wenig ich z. B. den Begriff des Baumes zerſtückeln kann, ohne ihn zu zerſtören, ſo wenig kann ich den individuellen, äuſeren oder inneren Baum zerſtückeln oder mehrere ganze zerſtückelte und zertrennte als lebende Bäume verbinden, ohne daſs der einzelne nicht

auf-

aufhörte, und die beiden getrennten nicht getödet würden; und zwar findet diefs bei dem äufseren Baume um fo mehr ftatt, je mehr er organifch das ift wahrhaft individuell ift, und feine Idee ausdrückt. — Unter jeden Begriff gehören unendlich viele Individuen, jede begriffliche Grenze ift alfo in der Vielheit der darunter geordneten Individuen wiederum unendlich; daher man auch fo viele, wiewohl *ganze* und ungetheilte begriffliche Individuen, als man will, das ift die Unendlichkeit der Vielheit ganzer Einheit wiederum begrenzt denken kann, wie man will. In diefer Vielheit als beftimmter Gröfse der Menge gleicher Individuen tritt alfo wieder die Anfchauung der beftimmten Gröfse derfelben, oder des Verhältniffes derfelben ein, weil auch hier ein Endliches, Reales (nehmlich die endliche Vielheit) nur dadurch *grofs* ift, dafs es nicht das Unendliche diefer Art felbft, noch das Nichts ift; alfo auch nur in feiner Gröfsenbeftimmtheit im Vergleich mit anderem Gröfsen (Endlichen) feiner Art möglich ift. Deutlich alfo ift hieraus, dafs und warum Gröfsen begrifflicher Art unftetige, individuelle oder discrete, oder auch logifche Gröfsen find. — — Betrachtet man in Vergleich mit der Gröfse der Begriffseinheit und der Einzelnen in derfelben, die Natur der Gröfse der Grenze des Leiblichen, im Raume, fowohl der räumlichen Grenze als folcher, als auch der innern Grenze des Endlich-räumlichen (auch der Zeit, welche, weil fie die der Vernunft und Natur gemeinfame Grenze ift, die Natur beider an fich trägt): fo findet man, dafs Gröfsen diefer Art ins unendliche theilbar, ftetig, einförmig, und in beliebigen Theilen einer ftetigen Einheit zufammenfetzbar find; z. B. die

Fläche,

Fläche, in endlichen Grenzen, läſst ſich in zwei, drei, ... Theile theilen, ohne drum an ihrer Realität zu verlieren; dieſe beliebigen Theile laſſen ſich in jeder Ordnung ohne Veränderung des Ganzen verbinden, wo der eine aufhört, fängt der andere an, wenn ich ſie verbinde; ich kann ſie aber auch auſer einander jeden für ſich ſtellen. Auch kann ich jede dergleichen Gröſse ſo vielmal nehmen, als ich will, alſo, wie dieſs bei discreten Gröſsen das einzige Gröſsenverhältniſs iſt, durch ganze Wiederholungen zuſammenſetzen. Die *Natur der ſtetigen Gröſsen, in Abſicht auf beſtimmte Gröſse, Vielheit und Verhältniſs faſst alſo die Natur der discreten in ſich, nicht aber umgekehrt.* Das beiden Gröſsen Gemeinſame iſt das Weſen der Gröſse, nehmlich daſs in beiden ein Reales Endliches, innerhalb vollendeter Grenzen, in ſeiner unendlichen Grenze erblicht wird; ferner daſs in beiderlei Gröſsen aus der Einheit Vielheit entſpringt, und aus der Vielheit, Einheit, nur bei den discreten Gröſsen mit Beſchränkung und Individualität, bei den ſtetigen aber ohne alle Grenzen ſtetig ins Unendliche.

Die Beſtimmungen aber der Grenzen oder Formen der Art nach, z. B. gerade oder krumm müſſen in jeder Sphäre durch beſtimmte Anſchauung erkannt, und durch Speculation deducirt werden. Ob allemal nur zwei Arten ſeien, oder ob und bei welchen Sphären mehrere Glieder der Eintheilung vorkommen (ob die Art der Gröſsen dichotomiſch oder polytomiſch getheilt werde), muſs philoſophiſch betrachtet und erkannt werden. Hier kann nur folgendes hierüber bemerkt werden:

a) Die

a) Die verſchiedenen Arten der Gröſsen bilden verſchiedene, ſich coordinirte Begriffsſphären, die ſich alſo als ſolche ausſchlieſsen, daher auch, was der einen Art, als ſolcher zukommt, nicht von der andern ausgeſagt werden kann. Man hat daher bei Aufſtellung der Arten der Gröſsen folgende allgemeine logiſche Regeln zu beobachten: daſs keine Abtheilung überſprungen werde (als wenn Jemand ſagte, die Linien ſeien entweder Kreislinien oder Spirallinien), wodurch die Betrachtung unvollſtändig werden würde; daſs ferner die angeführten Arten von gleicher Abſtufung ſeien (als wenn Jemand ſagte, die Linie ſei entweder gerade oder eine Kreislinie).

b) Sie ſind ſich poſitiv oder real entgegengeſetzt; denn es iſt in ihnen gemeinſchaftlich die Natur der höhern Grenze, deren Art in ihnen beſtimmt iſt, z. B. die gerade Linie ſowohl als die krumme iſt Länge mit beſtimmter Richtung; und ſie müſſen beide eine beſtimmte poſitive Anſchauung geben, nehmlich ſowohl die gerade als die krumme Linie muſs ſinnlich conſtruirt werden können. So müſſen demnach alle Gegenſätze der Mathematik (wie aller Wiſſenſchaften) ſein.

c) Mit der urſprünglichen Artverſchiedenheit der Grenzen iſt nicht die ſcheinbare zu verwechſeln, die blos aus Gröſsenbeſtimmung mehrerer ſtetiger Grenzen, die an demſelben Individuum ſind, und durch Vielheit discreter Gröſsen, entſpringt. Wodurch anders ſind z. B. die Arten (Species) der geradlinigen

gen Dreiecke verſchieden, als durch die Beſtimmung der ſtetigen Gröſse der Winkel und das dadurch beſtimmte ſtetige Gröſsenverhältniſs der Seitenlänge? Oder wodurch das geradlinige Viereck vom geradlinigen Dreieck? durch die verſchiedene Anzahl der Seiten (logiſche Vielheit derſelben) und Winkel, da in Rückſicht aller Seitenlängen zuſammengenommen, oder der Gröſse des Flächeninhalts beide gleich ſein können. Ein geradliniges Dreieck aber und ein krummliniges ſind urſprünglich der Art nach verſchieden in Rückſicht der Artverſchiedenheit ihrer Seiten.

Hieraus wird nun auch folgendes deutlich ſein: Die Individualität jedes Endlichen, vollſtändig Begrenzten iſt beſtimmt durch die Individualität ſeiner Grenze, und dieſe wieder durch die Individualität, das iſt die Art und Gröſse der Grenzen dieſer Grenzen, welche ſich wechſelſeits beſtimmen; und es wäre daher die Mathematik vollendet, wenn ſie alle mögliche Individualität Endlicher in allen Sphären in der Art und Gröſse ihrer Grenzen der unendlichen Grenze ſynthetiſch erſchöpft und conſtruirt hätte; welches aber zu vollenden unmöglich, weil die Grenze aller Art ein der Art nach unendliches Beſtimmbares iſt; welches in der Unendlichkeit der Welt in Gehalt und Form unmittelbar gegeben iſt.

Man betrachte z. B., wodurch denn die Individualität einer endlichen Ausdehnung als ſolcher, z. B. eines Kegels beſtimmt iſt? zuförderſt durch ſeine erſte Grenze die Fläche, welche an ihm von zwiefacher Art vorkommt, nehmlich die einfach gekrümmte, die in einem Punkte zuſammenläuft,

und

und durch die zweite Fläche die ebne, die die erstere schneidet, mit einer bestimmten krummen Linie abgebrochen wird. Diese beiden Flächen sind also erstens der Art nach verschieden, hernach aber durch ihre Grenzen, nehmlich die Linie und den Punkt in Rücksicht ihrer Ausdehnung begrenzt u. s. w. Oder nimm einen Würfel, so ist dieser durch die Art, Anzahl und Lage seiner Flächen (Grenzen) und die Art der Flächen wieder durch die Art und das Verhältniss auch die Grösse der Neigung ihrer Seiten bestimmt. Es würde also diese bestimmte mathematische Betrachtung (die Geometrie) vollendet sein, wenn man alle mögliche Arten der endlichen Raumbegrenzung erschöpft hätte; dazu gehörte, dass man erst alle mögliche Arten der Flächen, ihrer Begrenzung und Verbindung, und hiezu wieder, dass man alle Arten der Linien construirt hätte. Da diess nun aber unmöglich, so folgt, dass die Geometrie nie vollendet werden könne, in Rücksicht auf die absolute Vollständigkeit ihrer Synthesis; wohl aber kann und muss sie wahrhaft systematisch sein. Wovon an einem andern Orte noch weiter die Rede sein wird.

Hieraus ergiebt sich auch, dass im Begriffe der Mathematik ihr oberstes und einziges, durch consequente synthethische Construction immer weiter zu erfüllendes Axiom, enthalten sei; es ist, so gut als es ohne vorhergehende philosophische Deduction (nicht im gemeinen, sondern im oben gezeigten Sinne), hier ausgedrückt werden kann, folgendes:

Jeder untergeordneten, endlich unendlichen Sphäre der Welt kommt eigenthümliche der Art nach be-

stimmte,

ſtimmte, wiewohl unendliche Grenze zu, welche ſelbſt durch immer weiter fortgeſetzte Art- und Gröſsenbeſtimmung ins Unendliche weiter beſtimmt werden kann, und in der Welt, *an ſich* wirklich alſo beſtimmt *iſt*: daſs in vollendeter Form Individuen aller Einheiten oder Sphären der Welt begriffen ſind.

Der Beweiſs dieſes Axioms kann nur im Unendlichen Univerſum, im Abſoluten ſelbſt geführt werden, und liegt demnach über die Sphäre der Mathematik hinaus; ja durch dieſen Beweiſs wird ſie ſelbſt erſt abſolut und nothwendig erkannt, und philoſophiſch begründet.

Hierdurch iſt ferner die Einſicht in die Theile der Mathematik, oder in ihre einzelnen Wiſſenſchaften, ſo auch in die Ordnung und Beziehung gegeben, in welcher dieſe einzelnen Wiſſenſchaften an ſich, und daher auch in der Conſtruction ſtehen.

6.

Zuerſt (alſo) hat die Mathematik, die allen Formen (Grenzen) der Sphären aller Art gemeinſame Weiterbegrenzung der Gröſse, in ihrer unendlichen Weiterbeſtimmung und Individualiſirung, in der allgemeinen Mathematik, oder Arithmetik zu betrachten. Sodann aber auch die Weiterbeſtimmung der Grenze jeder beſtimmten Einheit oder Sphäre der Welt der Art und Gröſse nach zu vollenden. So viele Einheiten der Welt alſo es giebt, und in welcher Ordnung dieſe in einander ſtehen, ſo viele beſondere mathematiſche Wiſſenſchaften giebt es, und in der gleichen Ordnung und Verhältniſs ſtehen dieſelben ineinander. Da nun die beiden oberſten Sphären der Welt, die leibliche und die Vernunftwelt ſind, ſo muſs auch die oberſte Abtheilung der Mathematik in Mathematik der Vernunft und Mathematik der Natur ſein. Die erſtere iſt, ſo weit mir

bekannt,

bekannt, noch nicht als besondere Wissenschaft beachtet worden, sondern ihre Anfangsgründe werden gewöhnlich in der Philosophie der Vernunft betrachtet, z. B. in der Anschauung der Grenzbestimmung der Begriffseinheit, wie und nach welchem Gesetze sie bis zum Individuum herabfortgesetzt werden *soll*. Die Mathematik der Natur aber bestimmt und *soll* bestimmen die Grenzen dieser Sphäre bis zum Individuum herab. Diese Grenzen können hier mit bloser Evidenz der Anschauung angedeutet, nicht aber philosophisch erkannt werden. Sie sind innere und äusere Grenzen. Die äuseren Grenzen sind Weiterbegrenzung des Raums, als solchen; erstens bestimmte Art der endlichen Raumbegrenzung oder Figur mit bestimmter Gröfse, zweitens das beständige Weiterbestimmen dieser Grenze, der Figur, und des räumlichen Verhältnisses im Bilden in der Zeit, — die Bewegung. Hieraus entspringen die 2 nächsten mathematischen Wissenschaften nach der Arithmetik, die Figurenlehre (Geometrie) und die Bewegungslehre (Mechanik). Die erste betrachtet die Figur im Ruhen, die andere die Figur im Bilden (in der Zeit, als Kraft). — Die inneren Grenzen der Natur betreffen die Grenzen ihrer Individualisirung, oder ihres organischen Bildens in der Zeit. Da nun diess Individualisiren entweder ein chemisches, oder ein organisches im höheren Sinne ist, so folgt: dass die beiden hier noch übrigen mathematischen Wissenschaften folgende sind: erstens die vollständige Weiterbestimmung der Grenze des chemischen, sodann die vollständige Weiterbestimmung der Grenze des organischen Prozesses. Auch ist hieraus klar, dass diese mathematischen Wissenschaften der Natur in folgender Ordnung stehen und erkannt werden müssen: Geometrie, Mechanik, Chemik, Organik; weil die Bewegung eine sich bildende Gestalt ist, der chemische Prozess aber nothwendig in seinen Scheinproducten sowohl Gestalt als Bewegung an sich trägt, der organische Prozess endlich zugleich chemisch, mechanisch

und

und geometrifch ift. Hieraus ift ferner deutlich, dafs die Mathematik ein Factor der Naturphilofophie, nicht aber die Naturphilofophie felbft ift; denn die Mathematik ift auf Betrachtung des Endlichen als folchen, der Grenze gerichtet (welche Betrachtung freilich nur im Unendlichen und deffen Vorausfetzung möglich ift), und betrachtet immer in allen Naturprodukten blos die Grenze der Bildung; die Naturphilofophie aber ergreift das ungetheilte Leben der Natur, die Unendlichkeit, das Ineinanderbilden aller Grenzen, die abfolute Einheit und Unendlichkeit der Natur, als einer harmonifchen Einheit des Univerfum. Die Mathematik, ein Werk des Verftandes, die Naturphilofophie ein Werk der Vernunft (nicht jedoch als ob die Mathematik nicht der Vernunft, die Naturphilofophie nicht des Verftandes bedürfte).

Diefs alles kann hier nur als Refultat und unvollendet ausgefprochen werden; ich mufs daher diejenigen, denen Vorftehendes fremd, paradox, oder der beliebten Popularität der Mathematik gefährlich, vorkommen mag, bitten, die Sache felbft erft reiflich zu überlegen, oder eine philofophifche Abhandlung hierüber von einem Andern oder vom Verfaffer abzuwarten. Die vorurtheilsfreien Lefer aber, welchen diefe Speculationen noch neu find, mögen nach Durchlefung der Arithmetik und Geometrie zu diefer Abhandlung zurückkehren, und verfuchen, ob ihnen der Sinn davon eröfnet ift. Nur denen, welche mit der Philofophie vertraut find, kann ich hierbei vollkommen verftändlich zu fein hoffen.

II.

Grundriſs der Arithmetik.

1.

Die Arithmetik iſt Wiſſenſchaft von der Gröſse im Allgemeinen.

Dieſe Definition iſt ſchon in I vollkommen erklärt; die Arithmetik betrachtet nehmlich nicht die Beſtimmungen der Gröſse der Art nach, ſondern das, was Gröſſen aller Art, dadurch, daſs ſie Gröſsen ſind, gemeinſam iſt.

Da alſo die Arithmetik die allgemeine Natur der Gröſse betrachtet, ſo kann ſie weder von discreten, noch ſtetigen Gröſsen allein handeln, ſondern vielmehr von beiden. Demnach muſs die oberſte Abhandlung der Arithmetik die allgemeinen weſentlichen Eigenſchaften aller Gröſse, ſowohl ſtetiger als unſtetiger erkennen; ſodann die allgemeinen Eigenſchaften ſowohl der ſtetigen als der unſtetigen Gröſsen betrachten. Es würde alſo auch die Arithmetik ſtetiger Gröſsen, von der Arithmetik discreter Gröſsen getrennt abgehandelt werden müſſen; da aber, wie in I gezeigt, die Natur der ſtetigen Gröſsen, die der discreten oder logiſchen involvirt, ſo iſt dieſe Trennung nicht nothwendig; man muſs demnach blos angeben, was von den discreten

creten Gröſsen nicht gilt, wiewohl es von den ſtetigen aller Art wahr iſt.

Die Arithmetik kann nicht als Wiſſenſchaft der Zahlen, d. i. als Zahlenlehre definirt werden; denn es giebt, wie ſich bald zeigen wird, Beſtimmungen der Gröſsen gegen einander, die in Zahlen nicht können ausgedrückt werden, weil ſie keine Zahlen *ſind*; würde alſo die Arithmetik blos als Zahlenlehre erklärt, ſo würde der weſentlichſte und ſchönſte Theil derſelben, nehmlich die Betrachtung derjenigen Beſtimmungen der Gröſsen, welche der Zahl ewig entfliehen, ganz auſer ihr geſezt werden müſſen, jedoch in keiner andern Wiſſenſchaft eine Stelle finden können. Es iſt auch die Arithmetik dieſer ihrer gewöhnlichen beſchränkten Erklärung niemals treu geblieben.

Da die Natur der Gröſse, als ſolcher, nur in der weiteren Beſtimmung der Gröſsen durch Vergleichung oder Verhältniſs ſich in ihrer allgemeinen Beſtimmtheit weiſet, ſo kann die Definition der Arithmetik auch beſtimmter alſo gefaſst werden:

Die Arithmetik iſt die Wiſſenſchaft der Gröſse, der Gröſsenverhältniſſe (Verhältniſſe vorzugsweiſe ſo genannt), deren Natur, Conſtruction und Reconſtruction (Bildung und Auflöſung).

Wenn ferner erkannt ſein wird, daſs die Verhältniſſe entweder unendliche (durch Zahl unnennbare) oder endliche (durch Zahl nennbare) ſind, ſo wird dieſe Definition auch ſo ausgedrückt werden können:

Die Arithmetik iſt Wiſſenſchaft der Gröſse überhaupt, der Verhältniſſe, ſowohl der endlichen als der unendlichen, deren Natur, Conſtruction und Reconſtruction.

Die

Die Conſtruction und Reconſtruction der Verhältniſſe giebt die beſtimmten Rechnungsarten: es führt alſo auch die Arithmetik nothwendig zur Rechenkunſt.

Natur der Gröſse überhaupt, ſowohl der ſtetigen, als der unſtetigen.

2.

Die Sphäre des Realen jeder Art, innerhalb welcher die Gröſse iſt und erkannt wird, iſt unendliche Grenze, alſo als Grenze, in der Endlichkeit unendlich, alſo unermeſslich, ſelbſt weder groſs noch klein.

Iſt ſchon in I dargeſtellt; Beiſpiele ſind der unendliche Raum, die unendliche Zeit, die unendliche Begriffseinheit.

Es wird hiemit nicht ausgeſchloſſen, daſs nicht bei hinzukommender Artbeſtimmung einer unendlichen Grenze (alſo etwa in der Geometrie, Mechanik, ...) Sphären von Gröſsen gegeben ſein könnten, die durch die beſtimmte Verkettung der Conſtruction ihrer Accidenzen an ſich endlich wären, wie es auch wirklich dergleichen giebt (z. B. die Spirallinie, welche in allen Rückwindungen über eine beſtimmte Länge nicht hinaus kann, alſo von einem beſtimmten Puncte in ihr aus rückwärts ihr Gröſstes hat; oder die Ordinaten mehrerer krummen Linien). Auf dieſe durch Artbeſtimmungen kommende Begrenzungen der Sphären der Gröſse kann aber die Arithmetik, laut ihrer Definition, nicht Rückſicht nehmen.

Auch wird nicht behauptet, daſs die Sphäre, worin Gröſse iſt, in aller Rückſicht unendlich ſei, vielmehr

ift fie immer, als unendliche Grenze in ihrem Begriffe endlich (I).

Wollte aber Jemand dennoch, wider den Sprachgebrauch, jede auch unermefsliche, unendliche Grenze Gröfse nennen, fo müfste er nur hinterher feinem Sprachgebrauche treu bleiben, und endliche Gröfsen nicht mit unendlichen Gröfsen (in feinem Sinne) verwechfeln, indem fie beide von einander ins Unendliche gefchieden find, fo dafs eine endliche Gröfse nimmer eine unendliche Gröfse werden, oder auch nur derfelben fich nähern kann; fie kommen mit einander gar nicht in Vergleichung der Gröfse nach.

Diefer Satz ift für die Arithmetik Axiom, und kann nur mit dem I, 5. genannten allgemeinen Axiome der Mathematik zugleich durch Philofophie zum bewiefenen Theorem werden. Die Conftructionen der Arithmetik find endlich, alfo kann auch in ihnen und durch fie die Natur des Unendlichen, dergleichen in diefem Satze liegt, nicht erkannt werden; die Conftruction der Philofophie ift aber ganz im Unendlichen und Unbedingten, vermag alfo allein zu erkennen, welches die Natur eines Unendlichen ift.

Da die Arithmetik (I) die Gröfse im Allgemeinen betrachtet, und die allgemeine Unermefslichkeit aller Sphäre von Gröfse vorausfetzt, fo müfste fie die Gröfse und Verhältniffe *überhaupt*, in abftracto conftruiren. Alle Conftruction aber bildet nach der Idee des zu Conftruirenden ein finnliches Schema (Ideatum), woran fie die ewigen Eigenfchaften des Allgemeinen oder der Idee verfinnlicht (I). Daher mufs auch durch die ganze Arithmetik hindurch eine fchematifche Darftellung der allgemeinen Natur der Gröfse in beftimmter Con-

Construction einer bestimmten Art von Grösse dieselbe begleiten und ihr Anschaulichkeit geben. Und, weil die Arithmetik sowohl die Natur der stetigen als der unstetigen Grössen betrachtet, die Natur der ersteren aber die der letzteren in sich enthält, nicht aber umgekehrt (I. 5.): so folgt, dass das Schema der Arithmetik aus einer Sphäre stetiger Grösse sein müsse. Hiezu empfiehlt sich, wegen der Leichtigkeit der Construction und ihrer uneingeschränkten Unendlichkeit die gerade Linie, deren ich mich also hiezu beständig bedienen will, indem ich hier dem Beispiele Euclids, Segners und anderer einsichtsvoller Mathematiker folge, die es einsahen, dass die Arithmetik besonders die Betrachtung der Natur der Verhältnisse, ohne ein solches Schema, durchaus nicht zur Anschaulichkeit gebracht werden könne.

Die unendliche Sphäre der Grösse selbst kann nicht gross genannt werden, sondern nur Alles, was aus ihr durch vollendete Grenze herausgegrenzt ist, enthalte es nun von dieser Sphäre so viel oder so wenig, als es beliebe.

Alles Endliche also, was innerhalb vollendeter Grenzen, ein bestimmtes Positives, Reales aus einer unendlichen Sphäre (Grenze) enthält, ist gross; und die Bestimmtheit des innerhalb seiner Grenzen Enthaltenen, für sich betrachtet, ist seine absolute Grösse. Daher ist auch das Kleine gross, und alles Grosse könnte nicht gross sein, wenn es nicht klein wäre. Für sich betrachtet ist keine Grösse klein.

3.

Wie gross Etwas sei, das ist, wie die vollendete Grenze desselben bestimmt sei, lässt sich nur erkennen durch das, was über die Grenze hinausliegt, also durch die Verglei-

 chung

chung der Gröfse deffen was aufer der Grenze ift. Nun aber ift das, was aufer der Grenze liegt unendlich (2), alfo gar nicht grofs, alfo kann auch im Gegenfatz mit ihm die beftimmte Gröfse eines in ihm Enthaltenen nicht erkannt werden, weil die Glieder jeder Vergleichung in Rückficht deffen, worin fie verglichen werden, gleicher Art fein müffen. Daher kann auch die beftimmte Gröfse von Etwas nicht durch Vergleichung mit der abfoluten Grenze (dem Nichts) erkannt werden, weil auch diefs abfolut Privative nicht grofs ift, indem es gar nichts enthält. Es mufs alfo die beftimmte Gröfse von Etwas, nur in Vergleichung (Referiren, Verhalten, Aneinanderhalten) mit einer andern Gröfse (das ift einem andern Endlichen) erkannt werden, ja fie ift nur gegen eine andere Gröfse vorhanden, das ift, fie mufs im Verhältnifs fein und erkannt werden; die Beftimmtheit der Gröfsen gegen einander heifst ihr Verhältnifs vorzugsweife, und es hat jede Gröfse gegen jede andere ein beftimmtes Verhältnifs, welches durch die abfolute Gröfse beider beftimmt ift (Die im Verhältnifs verglichenen Gröfsen heifsen Glieder des Verhältniffes (termini rationis, ὅροι λογου). Es hat alfo auch Unendliches gegen Endliches gar kein Verhältnifs (nehmlich der Gröfse), und es können beide durchaus nicht in Rückficht der Gröfse in Vergleichung kommen. Es ift auch in fich widerfprechend, von unendlichen Gröfsen zu reden; und ein Pleonafmus, anftatt Gröfsen zu fagen, endliche Gröfsen zu nennen, weil jede Gröfse ihrem Wefen nach endlich ift.

Es ift hier nicht von der Beftimmung der Gröfse der Art nach (z. B. gerade oder krumm), fondern ihr felbft nach, als folcher, die Rede; wiewohl auch die Art der Begrenzung nur im reellen Gegenfatz des opponirten Gliedes ift und erkannt werden kann.

Nur

Nur Gröſsen von derſelben Sphäre (derſelben Art) können in Vergleichung kommen, oder haben gegen einander ein Verhältniſs.

Denn ſonſt iſt keine Vergleichung möglich, indem die Verglichenen immer der Art nach in der Rückſicht, in welcher ſie betrachtet werden, gleichgeſetzt ſein müſſen, weil alle Verſchiedenheit nur in der Einheit und Gleichſetzung iſt und erkannt wird. Daher hat z. B. eine Linie gegen eine beſtimmte Schwere kein Verhältniſs; wohl aber können 2 Linien in ihrer Sphäre ſich ſo verhalten, wie 2 Schweren in der ihrigen.

Einzelne Buchſtaben aus allerlei Alphabeten ſollen uns im Allgemeinen jede Gröſse andeuten, ohne auf ihre Beſtimmtheit zu ſehen. Daſs aber 2 Gröſsen in Verhältniſs ſtehen und betrachtet werden, wollen wir auf zweierlei Art bezeichnen, daſs

$\frac{A}{B}$ oder A..B

heiſst: A im Verhältniſs zu B. Gewöhnlich bedeutet A:B das Gleiche, der Grund aber, warum ich obige Bezeichnung vorſchlage, wird in der Folge deutlich werden.

Das Glied welches bezogen wird, ſoll das Vorderglied (terminus antecedens), das aber, worauf das erſtere bezogen wird, das Hinterglied (terminus conſequens) heiſsen. Auch werde ich in der Folge immer unter a das Vorderglied, unter b aber das Hinterglied verſtehen. Alſo heiſst $\frac{a}{b}$ oder a..b: das Verhältniſs jedes beliebigen Vordergliedes a, zu jedem beliebigen Hintergliede b.

4.

Je 2 Gröfsen find entweder gleich oder ungleich, und wenn fie ungleich find, ift eine gröfser die andere kleiner. Diejenige aber ift gröfser, welche aufer dem Reellen, was die andere in fich begreift, noch Etwas dergleichen in fich hält.

Denn je 2 Dinge, in Vergleichung gefetzt, find in der Rückficht der Vergleichung entweder ganz gleich (identifch) oder verfchieden (ungleich). Daher gilt diefs auch von je 2 Gröfsen, als folchen Und da ferner alle Ungleichheit in und durch die Gleichheit ift, fo mufs diefs auch bei Gröfsen als folchen der Fall fein; die eine der ungleichen mufs alfo gerade das fein was die andere ift, und zwar, weil von beftimmter Gröfse die Rede ift, gerade fo viel; und mufs aufserdem noch etwas dergleichen enthalten, wodurch fie mit der andern ungleich ift.

Das Zeichen der Gleichheit fei $=$, das der Ungleichheit Z; a $>$ b heifse: *a gröfser als b;* und a $<$ b heifse: *a kleiner als b;* a $>$ heifse: a *wird vergröfsert;* a $<$ heifse: *a wird verkleinert.*

Demnach ift auch das Verhältnifs zweier Gröfsen gegen einander entweder ein Verhältnifs der Gleichheit (ratio aequalitatis, f. ratio identica), oder der Ungleichheit ratio inaequalitatis), und letzteres entweder ein Verhältnifs der gröfseren Ungleichheit (ratio majoris inaequalitatis), wenn a $>$ b, d. i. wenn das Vorderglied gröfser als das Hinterglied; oder ein Verhältnifs der kleineren Ungleichheit (ratio minoris inaequalitatis), wenn a $<$ b. Wenn alfo $+$ bedeutet, dafs dasjenige, was dahinter fteht zum Vorherftehenden hinzugedacht werden foll, fo find folgendes die allgemeinen Ausdrücke

drücke für die drei Arten der Verhältnisse in Absicht auf die Ungleichheit der Glieder:

$$\frac{m}{m} \text{ oder } m \,..\, m$$

Verhältniſs der Gleichheit (ratio identica).

$$\frac{m+p}{m} \text{ oder } m+p \,..\, m$$

Verh. d. gröſsern Ungleichh. (r. maj. inaeq.).

$$\frac{m}{m+p} \text{ oder } m : m+p$$

Verh. d. kleinern Ungl. (r. min. inaeq.).

Es bedeutet hier sowohl m als p jede beliebige Gröſse.

Sätze, welche für die stetige und discrete Gröſse besonders wegen der verschiedenen Natur stetiger und discreter Gröſse, erwiesen werden müssen.

5.

Eine jede Begriffseinheit, sei sie nun eine Species oder ein Individuum, welches unter den Begriff geordnet wird, ist eine unstetige, discrete oder logische Gröſse; darum nehmlich Gröſse, weil dieselbe ein bestimmtes Reale der Anschauuug des Allgemeinen mit bestimmter Grenze (certa notarum definitione) enthält, und *unstetig* oder untheilbar darum, weil jeder Begriff ein unzertrennliches, untheilbares (individuelles und organisches) Ganze ausmacht, daher es also keinen Sinn hat z. B. vom halben, geviertheilten . . Baume, als Baum betrachtet, zu reden. Was im Begriffe ist, und unter ihn gehört, als Species oder als Individuum, enthält den ganzen Begriff, das ist das Ganze seiner Merkmale, sonst gehört es unter denselben gar nicht. Da ferner nur

nur diejenigen Gröſsen gegen einander ein Verhältniſs haben, die von derſelben Art ſind, ſo kann dieſs auch bei logiſchen Gröſsen nicht anders ſein. Nun liegt aber die Gleichartigkeit derſelben in der Begriffseinheit, worunter ſie gehören: alſo können auch nur ſolche logiſche Gröſsen mit einander verglichen werden, und im Verhältniſſe ſein, die unter denſelben Begriff gehören. Dieſer ihr Begriff alſo iſt die Einheit derſelben, worauf ſie bezogen werden müſſen. Da weiter jede ſolche Gröſse die ganze Einheit iſt, ſo kann von keinem anderen Gröſsenverhältniſſe der logiſchen Gröſsen die Rede ſein als:

a) von der weiteren Beſtimmung, wodurch ſie in der Einheit verſchieden ſind, welche in ihrem ſpecifiſchen Unterſchiede (differentia ſpecifica) beſteht; und

b) von der Vielheit ganzer ſolcher Gröſsen; wie viele Individuen nehmlich (von Specien oder Einzelnen) entweder überhaupt, oder nur in einem beſtimmten Falle vorhanden ſind. Es können demnach auch mehrere dergleichen Vielheiten (*ganzer* Einheiten) unter ſich verglichen werden, welches Verhältniſs alſo durch die Beſtimmtheit der ganzen Wiederholungen der Begriffseinheit gegeben iſt. Jeder Begriff, ſo hoch oder tief im Syſteme der Begriffe er ſei, enthält noch eine unendliche Menge von Einzelnen unter ſich. —

Da ferner bei der Vergleichung logiſcher Gröſsen alles auf ihre Begriffseinheit ankommt, worunter ſie gehören, zu dieſer aber ſo gut ein höherer als niederer Begriff genommen werden kann: ſo können logiſche Gröſsen in ſehr vielen Rückſichten vergleichbar ſein, in ſehr vielen andern unvergleichbar, z. B. die Roſe und der Stein, im Gegenſatze des Organiſchen und Unorganiſchen betrachtet, ſind unvergleichbar und verſchiedener Art, unter den Begriff

Körper

Körper gebracht, werden ſie aber gleichartig. — Alles wird unter dem allgemeinſten Gemeinbegriffe *Ding* vergleichbar. — Man kann aber immer zu einer niedern (d. i. weiter beſtimmten) Begriffseinheit abſteigen (weil das Einzeln-individuelle ſtets dem Begriffe entflieht), nicht aber ins Unendliche zu einer höhern Begriffseinheit aufſteigen, weil die höchſte: *Ding*, angegeben werden kann.

Es wird hiemit nicht geleugnet, daſs eine logiſche Gröſse, ſobald man will, als eine ſtetige betrachtet, daher ſtetig theilbar werden kann; wenn man nehmlich ein logiſches Individuum nimmt; z. B. dieſer beſtimmte Baum, als Baum betrachtet, iſt untheilbar, als Baumaterial aber (wo er Baum zu ſein aufhört) kann er beliebig eingetheilt und zerfället werden.

Folglich kann jede Vielheit begrifflicher Einzelner Individuen (nicht aber die Vielheit von Specien, die in gleicher Stufe untergeordnet ſind) *an ſich* durch ganze Einheiten ins Unendliche vermehrt werden, ohne alle Individuen zu erſchöpfen. Auch kann jede ſolche Vielheit durch Wegnahme ganzer Einheiten bis auf Eins, nicht aber weiter, herabgebracht werden. Da nun die Beſtimmtheit der Gröſsen gegen einander Verhältniſs iſt, dieſs aber durch die abſolute Gröſse ſeiner Glieder beſtimmt iſt (3): ſo kann auch bei logiſchen Gröſsen kein ander Verhältniſs ſtatt haben, auſer dem der Beſtimmtheit der Vielheit beſtimmter Mengen von *ganzen* Individuen, die und wiefern ſie unter denſelben Begriff geordnet ſind.

Die Beweiſse hievon gehören in die Logik.

6.

Eine ſtetige Gröſse iſt ein vollendet Begrenztes, Reelles, aus einer unendlichen Grenze deſſen, was in ſinnlicher Anſchauung (äuſerlich leiblicher, oder durch Phantaſie) enthalten

halten ist. Es ist die Natur jeder solchen unendlichen Grenze, dass sie in sich selbst, in allen ihren Theilen ungetrennt, stetig (continua) ist, wie diese Eigenschaft aus der gleichen des Gehaltes dieser Grenzen, der leiblichen Welt, in Ewigkeit hervorgeht. Daher auch, *wo* (nicht eben blos räumlich) einer ihrer Theile aufhört, *daselbst* der andere wieder anfängt; so wie sich diess an Raum, Zeit und Kraft aller Art findet. Es kommt auch diesen unendlichen Grenzen Bestimmbarkeit oder Begrenzbarkeit ohne Ende zu; dadurch eben, dass in ihnen mit vollendeter Grenze, ide ll das ist in Gedanken, nicht aber reell oder an sich, ein Theil derselben vom Unendlichen abgegrenzt wird, wird ein solcher eine Grösse, und weil ihm, wie seiner unendlichen Sphäre, Stetigkeit zukommt, wird er eine stetige Grösse. Indem nun alle solche Theile aus derselben Sphäre auch unter den Begriff derselben gehören, muss jede stetige Grösse auch eine logische sein, nicht aber jede logische, als solche, eine stetige. Da ferner das Verhältniss der Grössen unter einander nur in der Gleichheit ist, die Gleichheit aber der Form oder Grösse als solcher nicht ohne Gleichheit des Gehalts sein kann, diese Gleichheit aber des Gehalts nur in der Gleichheit der Art, dem Begriffe nach, beruhet: so können stetige Grössen nur gegen einander ein Verhältniss haben, wenn sie in Absicht ihres Gehaltes gleichartig, d. i. wenn sie aus derselben Sphäre von Grösse sind. Stetige Grössen also, wenn sie als solche vergleichbar sein sollen, müssen unter denselben Begriff gehören; nicht aber sind darum alle stetige Grössen die unter denselben Begriff gehören, vergleichbar, z. B. Linie und Fläche gehören unter denselben Begriff der Raumbegrenzung, können aber doch kein Verhältniss gegen einander haben, weil dieser Begriff, worin sie übereinstimmen, nicht der nächste ist.

Z. B. drei Linien, sie mögen so oder so lang sein, sind im Begriffe eins, und es gilt dabei eine gleich der andern

dern. Der ſtetigen Gröſse nach aber können ſie gar ſehr verſchieden ſein.

7.

Da alles Verhältniſs (3. 4.) aus der Gleichheit entſpringt, ſo muſs auch das Verhältniſs der ſtetigen Gröſsen, als ſolches, aus der Gleichheit entſpringen, und zwar aus der Gleichheit der ſtetigen Gröſse ſelbſt. Es wird daher ein Verhältniſs zweier ſtetiger Gröſsen (weil wenigſtens 2 erfordert werden; auch mehrerer ſtetiger Gröſsen) derſelben Sphäre (6) nur dann angeſchaut, wenn man irgend eine Gröſse derſelben Sphäre kennt, deren abſolute Gröſse in dem einen Gliede ſowohl als in dem andern Gliede iſt, und das Verhältniſs alſo der Glieder dadurch erkannt wird, daſs in dem einen dieſe ganze Vielheit, in dem andern aber jene ganze Vielheit derſelben genannten Gröſse geſetzt iſt. Es heiſse das genannte Stück m. Weil nun hiebei m in a (im Vordergliede) ſo viele ganze Male, in b aber ſo viele ganze Male enthalten iſt, ſo kann m die, a und b gemeinſame Einheit genannt werden, oder auch der gemeinſame Maſsſtab (menſura communis) für a und b. Wenn alſo das Verhältniſs angeſchaut werden ſoll, ſo muſs man für beide Glieder ein ſolches gemeinſames Maſs gefunden haben. Ob es aber nicht Verhältniſſe ſtetiger Gröſsen geben könne, wo es keinen ſolchen gemeinſamen Maſsſtab giebt, die man alſo auch niemals vollendet anſchauen kann, das muſs in der Folge unterſucht werden.

Wenn in der erſten Figur das Verhältniſs a .. b angeſchaut werden ſoll, ſo kann es nur vermöge des Stückes m geſchehen, welches in a 2 mal, in b aber 3 mal gelegen iſt. Es wird daher a und b von m gemeſſen. Daher kann man auch ſowohl a aus b, als auch b aus a entſtehen laſſen. Denn es ſei a gegeben, und man wiſſe, daſs a m 2 mal enthält, b aber daſſelbe m 3 mal: ſo

so darf man nur a in 2 gleiche Theile theilen, und diese Hälfte von a 3 mal nehmen, so hat man b. Oder auch, wenn b gegeben, und man weiſs, daſs m in b 3 mal, in a aber 2 mal gelegen ist: so darf man nur b in 3 gleiche Theile theilen, und so einen Theil 2 mal nehmen, so hat man a. Dieſs Construiren aber beider Glieder auseinander ist durch m bestimmt, daſs es nehmlich ein m giebt; oder wenn es eins giebt, daſs man es anschaut.

Daher kann auch das Verhältniſs von a . . b erklärt werden: die Bestimmtheit, mit welcher ein Glied aus dem andern entsteht. Und die Erkenntniſs eines Verhältnisses kann vollendet genannt werden: wenn man die beiden Glieder wechselseits auseinander bilden (construiren) kann.

Im Verhältnisse der Ungleichheit kann das gemeinsame Maſs, m, die kleinere Gröſse selbst sein; denn diese bestimmt oder miſst sich selbst, und kann auch die andere messen, wenn diese ihr Doppeltes, Dreifaches, ... n-faches ist (Fig. 2.)

Da uns n jede Gröſse bedeutet, so wird unter dem n-fachen hier jedes ganze Vielfache verstanden.

Gäbe es aber Gröſsen derselben Art, die an sich ein bestimmtes Verhältniſs haben müssen (3.), bei denen kein gemeinsamer Maſsstab gefunden werden könnte, weil sie dessen ermangelten: so würden auch solche Verhältnisse nicht auf die gezeigte Weise angeschaut, noch die Glieder derselben, durch den gemeinsamen Maſsstab, aus einander gebildet werden können. Ob es dergleichen giebt, ist weiterhin zu untersuchen, da uns daran liegen muſs, alle Arten der Verhältnisse zu entdecken. Diejenigen Verhältnisse, welche einen gemein-

meinſamen Maſsſtab haben, wollen wir indeſs endliche oder nennbare, diejenigen aber, die einen ſolchen nicht haben (wenn es anders dergleichen giebt, welches erſt zu unterſuchen), wollen wir unendliche oder unnennbare nennen.

Das Zeichen eines endlichen Verhältniſſes:

$\frac{a,}{b}$ oder a .,. b.

Das Zeichen eines unendlichen Verhältniſſes:

$\frac{a?}{b}$ oder a .?. b.

Soviel iſt indeſſen ſchon hier gewiſs, daſs es zwiſchen den Vielheiten logiſcher oder discreter Gröſsen nur endliche Verhältniſſe gebe, weil da allemal der Untheilbarkeit der Begriffseinheit wegen (5.) das Individuum der gemeinſame Maſsſtab der Vielheit iſt. Es betrifft alſo dieſe Frage blos die Verhältniſſe ſtetiger Gröſsen.

8.

Stetige Gröſse aller Art kann ins Unendliche vergröſſert oder verkleinert werden. Und zwar dieſs entweder ſtetig, d. i. ſo daſs keine beſtimmte Gröſse dabei übergangen werde, oder durch Sprung, d. i. ſo, daſs beſtimmte ganze Gröſsen entweder dazu oder davon genommen werden.

Daſs ſtetige Gröſsen verändert werden können, folgt aus der unendlichen Beſtimmbarkeit der unendlichen ſtetigen Grenze, woraus ſie ſind. Ebenfalls folgt hieraus, daſs auſer der Vergröſserung und Verkleinerung keine dritte Veränderung ſtetiger Gröſse möglich iſt. Denn das Weſen der Gröſse beruht in der Vollendetheit endlicher Grenze, und darin, daſs die Gröſse immer noch etwas in ſich faſſe. Alle Veränderung der Gröſse

Gröſse alſo muſs eine ſolche Veränderung derſelben ſein, daſs ſie doch Gröſse bleibt, alſo noch in endlicher Grenze Etwas befaſst; es muſs demnach blos die Grenze verändert werden, an welcher keine weitere Beſtimmung möglich iſt, als ſie zu verengen, oder zu erweitern (I, 5.), alſo ihren Gehalt zu verkleinern oder zu vergröſsern. Wenn man alſo anſtatt der Gröſse ihr Unendliches, oder Nichts (=0) ſetzt, ſo wird die Gröſse nicht verändert, ſondern vernichtet, weil im erſten Falle die Grenze, im zweiten der Gehalt vernichtet wird.

Wenn demnach gleich die Gröſse ſelbſt nicht anders verändert werden kann, als durch Vergröſserung oder Verkleinerung, ſo kann doch dieſs vielleicht auf verſchiedene Weiſe bewirkt werden; worauf alſo in der Folge zu merken.

Weil ferner dieſer Beweiſs, daſs nehmlich eine Gröſse ſich blos durch Vergröſserung und Verkleinerung verändern laſſe, aus der allgemeinen Natur der Gröſse geführt worden, ſo gilt er auch von logiſchen Gröſsen.

Daſs dieſe Verkleinerung und Vergröſserung ins Unendliche gehe, folgt aus der unendlichen Weiterbeſtimmung der ſtetigen Gröſse herabwärts zum Nichts und heraufwärts nach dem Unendlichen; weil jede ſtetige Gröſse, an ſich, aus einer unendlichen Sphäre iſt, welche durchs Endliche d. i. durchs Groſse weder erreicht noch ermeſſen werden kann. Es wird alſo dieſs aus der unendlichen Weiterbeſtimmbarkeit, und aus der Unermeſslichkeit der Sphäre ſtetiger Gröſse bewieſen.

Logiſche Gröſsen leiden hierbei (5.) die Beſchränkung der Untheilbarkeit ihrer Einzelnen, ſie können

nen daher wohl durch ganze Einheiten in ihrer Vielheit ins unendliche vergröſsert, nicht aber unter 1 herunter verkleinert werden.

Daſs dieſe Veränderungen ſtetiger Gröſse ſelbſt ſtetig geſchehen könne, ohne irgend eine mögliche abſolute Gröſse des veränderten Ganzen zu übergehen, folgt ebenfalls aus der unendlichen Beſtimmbarkeit und Stetigkeit des Seins aller Sphären ſtetiger Gröſse.

So kann z. B. Fig. 3. b ins Unendliche ſtetig verlängert, oder ins Unendliche ſtetig verkürzt werden, nur mit dem Unterſchiede, daſs ſie, als Endliches mit einemmale ganz aufgehoben werden kann; ſo daſs z. B. wenn ſie in beſtimmter Zeit um ein beſtimmtes Gleiches kürzer wurde, ſie einmal ganz vernichtet würde, niemals aber, wenn ſie in irgend etwas beſtimmes Gleiches in derſelben Zeit zunähme, das Unermeſsliche ihrer Art erreichen, d. i. die unendliche Linie ſelbſt, werden könnte. Die Behauptung der unendlichen Verkleinerbarkeit von b ſagt alſo, ganz abgeſehen von dieſer Zeitbedingung, die auſer der Artthmetik liegt, daſs man jede kleine Gröſse dennoch verkleinern könne, wenn man etwas kleineres, als ſie iſt, von ihr wegnimmt.

Man kann jede gerade Linie, b, von beiden Seiten vergröſsern, und von beiden Seiten verkleinern, und das Behauptete gilt davon eben ſo gut. Von dieſer Anſchauug werde ich in der Folge Gebrauch machen.

Daſs dieſes Verkleinern und Vergröſsern auch ſprungsweiſe (per ſaltum) geſchehen könne, folgt daraus, daſs jedes Stück ſtetiger Gröſse, für ſich betrachtet, auch mehrere

mehrere dergleichen mit ihren Grenzen zusammengedacht werden können, indem man durch stetiges Wachsthum auch dieselbe Grösse erreicht hätte, die durch das Zusammensetzen und Trennen ganzer Stücken auch entsteht.

Fig. 4. kann man b aus den 4 Stücken c, d, e, f zusammensetzen; man würde aber auch b erhalten haben, wenn man die g hätte stetig wachsen lassen, weil bei dem stetigen Wachsthum alle mögliche Werthe (valores, bestimmte Grössen) stetig durchlaufen werden.

Da also das sprungsweise Verändern der stetigen Grösse, in ihrem stetigen Verändern enthalten ist, nicht aber umgekehrt, so gilt auch obiges, nehmlich, dass diese Veränderung beiderseits ins Unendliche gehe, von der unstetigen Veränderung.

Wenn nun + das Hinzuthun, — das Hinweg-wegnehmen, U das Unendliche, und o das Nichts, ... aber die unendliche Fortsetzung bedeutet, so ist

$$a + b + c + d + e + \ldots\ldots \text{ nicht } U.$$

Und, wenn von α, β, γ, δ.... der folgende Buchstabe immer ein kleineres als das durch die Wegnahme der vorigen von α Uebriggebliebne andeutet, ist

$$+ \alpha - \beta - \gamma - \delta \ldots\ldots \text{ nicht } o.$$

Wächst eine stetige Grösse b vom Nichts stetig ins Unendliche (das heisst nicht, bis sie das Unendliche erreicht), und eine andere a, derselben Art, bleibt unverändert, wie sie ist, so läuft die stetig wachsende (veränderliche) gegen die bleibende (unveränderliche) durch alle mögliche Verhältnisse, endliche und unendliche hindurch, erst nehmlich durch alle der grösseren Ungleichheit (nehmlich a als

als Vorderglied betrachtet) ſodann, nachdem ſie a gleich geworden und das identiſche Verhältniſs damit gebildet hat, alle Verhältniſſe der kleineren Ungleichheit, wiewohl ſie nie alle Verhältniſſe der kleineren Ungleichheit vollenden kann, weil ſie dann nicht ohne Ende müſste verlängert werden können.

In Fig. 5. ſei b die von Nichts ſtetig wachſende (veränderliche) a aber die unveränderliche ſtetige Gröſse; a ſei Vorderglied, b Hinterglied. So durchläuft a gegen b, indem b wächſt, alle mögliche Verhältniſſe. Denn das Verhältniſs iſt durch die abſolute Gröſse beider Glieder beſtimmt; ſo vielerlei abſolute Gröſsen von b es giebt, ſo vielerlei Verhältniſſe giebt es zwiſchen a und b; nun aber durchläuft b alle mögliche abſolute Gröſse, alſo auch alle Verhältniſſe gegen a, oder a gegen b; alſo auch ſowohl endliche als unendliche, wenn es letztere giebt; und zwar in derſelben Ordnung, wie die Verhältniſſe nach der Gröſse der Glieder aufeinander folgen, weil ſtetig vom kleinern zum gröſsern, im ſtetigen Wachsthume von b fortgeſchritten wird.

Betrachtet man umgekehrt die ſtetig wachſende als Vorderglied, die unveränderliche als Hinterglied, ſo werden erſt alle Verhältniſſe der kleinern, hernach alle Verhältniſſe der gröſſern Ungleichheit durchlaufen, nur daſs hier die letztern, wie in der vorigen Beziehung die erſteren, nie vollendet werden können.

Alle ſtetige Gröſsen, welche ungleich ſind in derſelben Sphäre, können durch ſtetiges Wachsthum auseinander werden.

Denn ſie ſind nur durch die Beſtimmung ihrer endlichen Grenze verſchieden, welche man ſtetig verengen

oder erweitern kann, bis man unter allen abſoluten Gröſsen auch die verlangte erreicht.

(Nicht aber kann aus Endlichem durch ſtetiges Wachsthum Unendliches werden).

Nur ſtetige Gröſsen derſelben Art oder Sphäre haben gegen einander Verhältniſs (6), alle ſtetige Gröſsen derſelben Art können aber, wie eben erwieſen, auseinander durch ſtetiges Wachsthum werden: alſo könnnen auch alle ſtetigen Gröſsen, die ein Verhältniſs zu einander haben, durch einander durch ſtetiges Wachsthum gebildet werden. Und weil das letzte eine weſentliche Eigenſchaft ſtetiger Gröſsen derſelben Art iſt, ſo muſs es auch eine ſolche für die Gröſsen ſein, die ein Verhältniſs gegen einander haben. Nur alſo haben ſolche ſtetige Gröſsen gegen einander ein beſtimmtes Verhältniſs, die durch ſtetige Veränderung (Wachsthum) auseinander werden (oder ſich gleich werden) können).

9.

Jede Gröſse iſt eine Zahl jeder andern Gröſse, als ihrer Einheit, deren genau angebliche und anſchauliche Vielheit ſie iſt. Entſteht ſie (ihre Vielheit) aus ganzen Wiederholungen ihrer Einheit, ſo heiſst ſie eine ganze Zahl (numerus integer), enthält ſie aber irgend einen beſtimmtvielten Theil (von gleichen Theilen) ihrer Einheit, ſo heiſst ſie eine gebrochne Zahl (numerus fractus), oder ein Bruch dieſer Einheit. Dieſelbe Gröſse kann von einer andern Gröſse eine Zahl, von einer dritten aber keine Zahl ſein. Auch kann dieſelbe Gröſse von der einen Einheit eine gebrochne, von einer andern aber eine ganze Zahl ſein. Es iſt die Zahl nichts, als die Beſchaffenheit der Glieder endlicher Verhältniſſe, und keine Gröſse iſt daher für ſich betrachtet eine Zahl. Da man nun ein endliches Verhältniſs, das iſt beſtimmte Vielheit im allgemeinen betrachten kann,

alſo auch die Zahlen (als Ausdruck derſelben), ſo ſind die Zahlen allgemeine Ausdrücke beſtimmter endlicher Verhältniſſe.

Im endlichen Verhältniſſe (7.) iſt ein gemeinſamer Maſsſtab m in a ſo viele ganze male in b ſo viele; beide a und b werden von m gemeſſen, ſind alſo eine beſtimmte Vielheit von m; deshalb ſagt man a und b ſeien Zahlen von m, als ihrer gemeinſamen Einheit, welches nur ein anderer Ausdruck iſt als der: ſie werden von m gemeſſen. Da nun hier immer ein ganzes m genommen wird, ſo nennt man a und b ganze Zahlen von m (Fig. 1, 2.). Stellt man ſich dieſs Verhältniſs von a . . b im allgemeinen vor, ohne die Gröſse von m individuell zu beſtimmen, ſo hat man die Vorſtellung dieſer beſtimmten Vielheiten im allgemeinen, oder die Vorſtellung dieſer ganzen Zahlen überhaupt. Und es ſind daher alle 2 Glieder eines endlichen Verhältniſſes Zahlen derſelben Einheit m und zwar ganze Zahlen.

Wenn aber a und b ganze Zahlen von m ſind, ſo können ſie auch auseinander conſtruirt werden; man darf nehmlich nur a in ſoviel gleiche Theile theilen, als vielemale m in a enthalten iſt, und dann dieſen Theil ſo vielemale nehmen, als m in b iſt; z. B. Fig. 1. muſs a in 2 gleiche Theile getheilt, und ſo ein Theil 3 mal genommen werden, ſo hat man b; und eben ſo kann man aus b, a bilden. Man kann alſo ſowohl a als b als Einheit betrachten, und das andere Glied davon wird dadurch deſſen beſtimmte Vielheit, welche entſteht, wenn die Einheit in eine beſtimmte Menge gleiche Theile getheilt, und ſo ein Theil beſtimmte ganzemale genommen wird. Wenn nun jede beſtimmte Vielheit zu ihrer Einheit, Zahl heiſst, ſo ſind

auch a und b Zahlen gegen einander; welche wegen der Zerfällung der Einheit gebrochne Zahlen heiſsen. Eine ganze Zahl wird unmittelbar gefunden aus ihrer Einheit, eine gebrochne Zahl aber durch Eintheilung ihrer Einheit, und Aufſuchung einer zweiten Einheit, welche ſowohl die Zahl als die Einheit ausmiſst; z. B. Fig. 1. iſt b eine gebrochne Zahl von a, deshalb muſs erſt durch Halbirung von a die zweite Einheit gefunden werden, welche ſowohl a als b durch ganze Wiederholung ausmiſst, woraus hernach b conſtruirt wird. Es erfordert alſo auch jede gebrochne Zahl zwei ganze Zahlen an ſich ſowohl als in der Erkenntniſs, weil nehmlich erſt die Einheit als ganze Zahl der b Hülfseinheit (oder b als ganze Zahl vom m) gegeben und erkannt ſein, hernach auch der Werth des Bruchs ſelbſt oder die gebrochne Gröſse als ganze Zahl derſelben Hülfseinheit (m), als des gemeinſamen Maſses, vorhanden ſein muſs.

In jedem Verhältniſſe alſo, welches endlich iſt, ſind die Glieder und das gemeinſame Maſs (a, b, m) Zahlen voneinander; a von m, und b von m nothwendigerweiſe ganze Zahlen; aber a und b von einander entweder ganze Zahlen oder gebrochne; a und b können hiebei wechſelſeits gebrochne Zahlen ſein (Fig. 1.), oder die eine von der andern eine ganze umgekehrt aber die letztere von erſterer eine gebrochne Zahl ſein (Fig. 2.); wenn aber a von b (oder umgekehrt) eine ganze Zahl iſt, ſo kann nicht wiederum b von a auch eine ganze Zahl ſein, es müſste denn a = b ſein; weil ſonſt a zugleich $>$ b und zugleich a $<$ b ſein müſste, welches unmöglich.

Es giebt alſo auch keine Zahlen auſer ganzen und gebrochnen (man müſste denn den Ausdruck der

Be-

Beſtimmtheit der Glieder unendlicher Verhältniſſe der Natur der Sache zuwider auch Zahlen nennen): denn es giebt keine andere Art endlicher beſtimmter Vielheit gegen einander als im Verhältniſſe der Gleichheit oder der Ungleichheit, woraus wie gezeigt, nur dieſe beiden Arten von Zahlen entſpringen.

So wie ferner jede Gröſse a im Verhältniſs mit allen möglichen Gröſsen ihrer Art, b, c, d, e...., betrachtet werden kann, und nach der Verſchiedenheit der abſoluten Gröſse dieſer b, c, d, e, f auch das Verhältniſs von a gegen dieſelben verſchieden iſt, ſo folgt auch: daſs a gegen eine Gröſse b in endlichem, gegen eine andere c in unendlichem Verhältniſſe ſtehen könne (wenn es nehmlich überhaupt unendliche Verhältniſſe giebt); wenn z. B. gleich (Fig. 6.) a.?.b, ſo kann doch a.,.c z. B. 3mal c ſein; ferner folgt auch, daſs a gegen die eine Gröſse dieſe, gegen eine andere aber eine beliebige Zahl ſein könne; z. B. (Fig. 7.) a iſt von b eine gebrochne Zahl nehmlich die Hälfte, und von c eine ganze, nemlich 3.

Die Vielheit endlich-ſich-verhaltender Gröſsen im Allgemeinen gedacht, ohne die individuelle Gröſse der Einheiten zu beſtimmen, giebt die Zahl überhaupt. Nichtsdeſtoweniger muſs die Betrachtung der Zahlen überhaupt eine beſtimmte Einheit von beſtimmter Art als Schema, nicht als Beweiſsgrund, zu Hülfe nehmen.

Hieraus iſt auch deutlich, daſs Zahlen gegen einander nicht gewürdigt werden können, wenn man nicht ſtillſchweigend vorausſetzt, daſs ſie ſich alle auf dieſelbe Einheit beziehen, welche hinfort, wegen der

Will-

Willkührlichkeit ihrer individuellen und Artbeſtimmung die willkührliche oder abſolute Einheit genannt und durch A angedeutet werden ſoll. Alle einzelngeſtellte Zahlen werden alſo nicht für ſich verſtanden, ſondern ſie werden eigentlich als Vorderglied in Beziehung auf die Einheit als das beſtändige Hinterglied im Verhältniſſe erkannt; z. B. Fig. 8. iſt gegen A betrachtet g = 3; alſo

$$g \,..\, A = 3 \,..\, 1$$

wo der Zahlenausdruck das Verhältniſs von g : A im Allgemeinen ausdrückt; ferner iſt gegen A betrachtet, e = ein halb; alſo

e : A = ein halb .. 1.

Es wird alſo bei den Zahlen das beſtändige Hinterglied, die abſolute Einheit, nicht angegeben.

Hierdurch zeigt ſich auch eine bequeme Art gebrochne Zahlen auszudrücken; da nehmlich die Einheit immer das Hinterglied die Bruchgröſse aber das Vorderglied iſt, und aus dem Hintergliede das Vorderglied gebildet wird dadurch, daſs man angiebt in wieviel Theile das Hinterglied zertheilt werden müſſe, um das Maſs zur Einheit und der Bruchgröſse zu finden; ſo darf man nur an die Stelle des Hinterglieds (welches für die Zahlen immer die abſolute Einheit, A, iſt) die Eintheilungszahl, und in die Stelle des Vorderglieds die Vervielfachungszahl ſetzen. Z. B. in Fig. 9. ſei A die abſolute Einheit, und B ein Bruch derſelben, ſo iſt alſo A Hinterglied und B Vorderglied des Verhältniſſes; nun entſteht B aus A wenn man A in 3 gleiche Theile theilt, und dieſen dritten Theil von A, als das gemeinſch. Maſs (m) für A und B, 2mal nimmt; es iſt alſo die Eintheilungszahl 3 und die Vervielfachungszahl 2; man ſetze demnach die 3 an die Stelle von A

und

und 2 an die Stelle von B; so ist $B = \frac{2}{3}$ von A, oder 2..3, weil

$$\frac{B}{A} = \frac{2}{3} \text{ oder } B..A = 2..3.$$

Es ist daher der Ausdruck einer gebrochnen Zahl mit dem des endlichen Verhältnisses des gebrochnen Werths zur absoluten Einheit seiner Natur nach der gleiche.

Wenn hinfort gesagt wird, es solle irgend eine Gröfse in bestimmt viele Theile getheilt werden, so verstehe, wenn nicht das Gegentheil erinnert wird, stets: *gleiche* Theile.

Bedeuten also n und m alle mögliche ganze Zahlen, so ist ein allgemeiner Ausdruck jedes solchen Bruchs, wie betrachtet worden ist: $\frac{n}{m}$ oder n..m.

Auch ganze Zahlen können unter diesen Ausdruck gebracht werden; dann steht aber immer in der Stelle der absoluten Einheit, unter dem Striche 1, als z. B. $3 = \frac{3}{1}$ oder 3..1. Im allgem. also bedeutet $\frac{n}{1}$ jede ganze Zahl.

Wir werden in der Folge die Natur der gebrochnen Zahlen bestimmter betrachten; und finden dafs sowohl n als m wieder gebrochne Zahlen sein können; u. s. f. ins U.

Bei logischen Gröfsen finden nur gebrochne Zahlen statt, wenn die absolute Einheit eine Vielheit von den betrachteten begrifflichen Individuen ist, und auch da nur solche, wo die Eintheilungszahl keine Zertheilung der Individuen fordert.

Der

Der Beweiſs liegt in der Individualität der Begriffseinheit (5).

Z. B. $\frac{5}{3}$ Baum hat keinen Sinn, weil ein Baum, ohne (begrifflich betrachtet) aufzuhören, nicht in 3 Theile kann zerfällt werden. Setzt man aber 3 Bäume als abſolute Einheit, ſo giebt es $\frac{5}{3}$ nehmlich von A, das iſt 5 Bäume; nicht aber $\frac{5}{4}$ von A, weil dann 3 Bäume in 4 Theile müſsten getheilt werden, welches ohne Zerfällung der Individuen nicht geſchehen kann.

Wenn aber gleich dergleichen Forderungen als: $\frac{5}{3}$ Baum, oder Menſch, an ſich durchaus ſinnlos ſind, ſo erhalten ſie doch zuweilen durch Beziehung auf eine Sphäre ſtetiger Gröſse Sinn. Als z. B. wenn bei einer Einquartirung je Einer $\frac{5}{3}$ Mann ernähren ſollte, ſo kann er von dem Werthe an Gelde oder Lebensmitteln der für einen Mann entrichtet wird, den dritten Theil 5mal bezahlen; da wird aber der Mann ſelbſt als ſtetige Gröſse in Abſicht ſeiner ſtetigen Ernährung betrachtet, und dafür wieder eine gleichgeltende Einheit aus einer gleichgeltenden Sphäre ſtetiger Gröſse (Geld, Nahrungsmittel) geſetzt; die ſich nun nach Belieben eintheilen läſst.

Soll eine Zahl angeſchaut werden, ſo muſs man die einzelnen Einheiten die darinnen ſind als Einzelne und zugleich in ihrem Ganzen, dem als Zahl angeſchauten, als relative Totalität erkennen. Verliert man die Anſchauung der Einzelnen aus dem Auge, ſo entſteht die unbeſtimmte Anſchauung einer bloſen Menge; faſst man ſie aber nicht als Ganzes auf, ſo betrachtet man jedes Einzelne für ſich, nicht im Verhältniſſe.

Soll

Soll ich z. B. die Zahl 4 Linien genau anſchauen, ſo muſs ich in ihrem Ganzen jede einzelne Linie von den vieren erkennen, ſonſt denke ich blos eine Menge Linien. Oder wenn ich einen Sandhaufen als Menge betrachte, ſo ſchaue ich nicht jedes Sandkörnchen an. Jede Menge, wenn ſie endlich iſt, iſt auch eine Gröſse, alſo auch gegen jede Einheit ihrer Art im beſtimmten Verhältniſſe, entweder im endlichen, dann *iſt* ſie an ſich betrachtet, Zahl; oder im unendlichen, dann *iſt* ſie keine Zahl. Daraus alſo, daſs Gröſsen gegen einander Zahlen *ſind*, folgt noch nicht, daſs ſie von einem Vernunftweſen als die beſtimmte Zahl eben angeſchaut werden, welche ſie ſind; umgekehrt aber, daraus daſs etwas in wirklicher Anſchauung als Zahl erkannt wird (wenn die Anſchauung vollendet wäre) folgt, daſs es auch an ſich Zahl *ſei*.

So kann man auf der andern Seite ein Einzelnes auf das andere folgend betrachten, aber nicht in ein Ganzes zuſammenfaſſen, z. B. alle einzelne Körner einer Menge Sandes: dann entſteht keine Anſchauung ihrer beſtimmten Zahl, die an ſich wirklich iſt, ſondern ebenfalls, wenn man hinterher ſie in ein Ganzes auffaſſen will, nur die unbeſtimmte Abſchauung einer bloſen Menge.

Eins in Bezug auf ſich ſelbſt, und auf alle andere Zahlen iſt auch eine Zahl, aus und in dieſer Zahl entſpringen und ſind alle andere. So iſt auch 1 . . 1 das urſprünglichſte Verhältniſs. Die ganze vorige Betrachtung iſt Beweiſs dafür.

10.

Jede ſtetige Gröſse kann ſo vielemale zu ſich ſelbſt geſetzt werden, als man will, oder es kann von jeder ſtetigen Grö-

Gröfse als abfoluter Einheit jede ganze Zahl conftruirt werden.

Denn jede ftetige Gröfse kann ins Unendliche ftetig vergröfsert werden, und die ftetige Vergröfserung fafst alle fprungsweife Vergröfserung in fich (8). Hierdurch entftehen alfo ganze Zahlen (9), wie fie in Gröfse auf einander folgen, weil ihr Unterfchied ftets 1 ift. Ihre Reihe alfo ift bei ftetigen Gröfsen unendlich.

Das heifst aber nicht: irgend eine ganze Zahl ift das Unendliche; welches abfurd. Ihre Reihe werde vom Anfang mit folgenden Zeichen bedeutet:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9........

Auch jede logifche individuelle Gröfse Einzelner kann fo vielemale zu fich felbft gefetzt werden, als man will; oder: es kann auch von jeder logifchen Gröfse jede ganze Zahl conftruirt werden.

Denn jeder Begriff befafst unendlich viele Individuen. Sind aber Species die abfolute Einheit, fo ift ftets die Menge des in gleicher Abftufung gegebenen Specien, wenn fie der Art nach beftimmt werden, endlich; wiewohl die Sphäre der in allen Abftufungen untergeordneten Specien unendlich ift (Logik).

Die Reihe der ganzen Zahlen ift alfo für alle Gröfsen unendlich.

Denn fie ift es für ftetige und logifche Einzelne. Jede ftetige Gröfse ift in beliebigviele gleiche Theile theilbar.

Denn fie ift überhaupt ins Unendliche theilbar laut ihrer Natur (I, 5; 6.).

Es

Es ſei alſo eine Gröſse ſo groſs oder klein als ſie wolle, ſo hat doch ihre Hälfte, ihr Drittel, ihr Tauſendtheil eine beſtimmte Gröſse, > als Nichts; denn ſollte, um es ſo apagogiſch zu beweiſen, von a *ein* tauſendſter Theil nichts enthalten, ſo enthielte auch der dem erſten gleiche 2te, 3te tauſendſte nichts, alſo wäre auch a nichts, wider die Vorausſetzung.

(In wiefern apagogiſche Beweiſse überhaupt zuläſsig ſeien, davon in der Folge. Daſs ſie erläutern, iſt gewiſs.)

Alſo läſst ſich auch von jeder Einheit ſtetiger Gröſse jeder mögliche Bruch bilden.

Denn ein Bruch entſteht, wenn eine Einheit in beliebigviele gleiche Theile getheilt, und ſo ein Theil beliebigviele ganzemale genommen wird. Beides aber kann, wie eben erwieſen, geſchehen.

Bei ſtetigen Gröſsen giebt es alſo unendliche viele unendliche Reihen gebrochner Zahlen; als

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{2},\ \frac{5}{2}\ \ldots\ldots$$
$$\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{3},\ \frac{4}{3},\ \frac{5}{3}\ \ldots\ldots$$
$$\frac{1}{4},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{4},\ \frac{5}{4}\ \ldots\ldots$$

.

.

.

alle aber erreichen das Unendliche nicht. Von dieſen Brüchen ſind viele ganze Zahlen gleich, wiewohl ſie als Brüche angeſehen und conſtruirt werden können; z. B. $\frac{3}{3} = 1$ kann wirklich ſo conſtruirt werden, daſs man A in 3 Theile theilt, und ſo einen Theil 3mal nimmt. Uiber die Eintheilungen und Eigenſchaften der Brüche und ihrer Reihen werden wir in der Folge unterſuchen müſſen.

Bei

Bei logischen Grösen giebt es nur Brüche unter den in 9 angeführten Bedingungen.

11.

Von jeder Einheit stetiger Grösse kann jede Zahl (jede ganze und jede gebrochne) gebildet (construirt) und auch kann jede stetige Grösse als jede Zahl angesehen und dazu die Einheit gesucht werden.

Mit andern Worten:

Jede stetige Grösse kann mit jeder Zahl multiplicirt (vervielfacht; das ist, ein Vielfaches von ihr, als Einheit gesucht) oder auch dividirt (nach ihr eingetheilt) werden.

(Nicht jedoch hat man zu denken, dass durch jede Vervielfachung ein Grösseres, und durch jede Eintheilung ein Kleineres entstehen müsse.)

Denn von jeder stetigen Grösse, als Einheit, kann jede ganze Zahl construirt werden (10.).

Auch jede gebrochne (10.).

Z. B. von b Fig. 1. kann die gebrochne Zahl $\frac{2}{3}$ gebildet werden, wenn man b in 3 Theile theilt, und diesen dritten Theil 2mal nimmt; daher ist auch a kleiner als b, also ein kleineres Vielfache; indem m in a wenigere male als in b genommen wird. Wird ferner Fig. 8. g aus f gebildet, so wird von f die Zahl $\frac{3}{2}$ gebildet, oder es wird f mit $\frac{3}{2}$ multiplicirt.

Die Multiplication werde durch n . m oder n $\times$ m oder in Buchstaben durch bloses Aneinandersetzen nm bedeutet. Die zu vervielfachende Grösse heisse Multiplicand, die vervielfachende Zahl Multiplicator; beide, Multiplicand und Multiplicator, heissen

heiſsen Factoren (Macher), und das durch ſie beſtimmte Vielfache das Product. Von den beiden Factoren ſagt man: ſie *können* (poſſunt) ihr Product (welches einige des *Vermögen* nicht unpaſſend genannt haben).

Jede ſtetige Gröſse kann aber auch als jede Vielheit, das iſt als jede Zahl angeſehen, oder was das Gleiche ſagt, durch jede Zahl dividirt oder eingetheilt werden. Man ſucht hiebei diejenige Gröſse, als deren beſtimmte Zahl die zu dividirende Gröſse angenommen wird.

Es werde zum B. F. 2. a als $\frac{1}{3}$ derjenigen Einheit angeſehen, die man ſucht, das iſt, es werde a durch $\frac{1}{3}$ eingetheilt, ſo weiſs man, daſs von der geſuchten Einheit der dritte Theil a iſt; alſo muſs die geſuchte Einheit = 3mal a, = b ſein. Ein ſolches b muſs es aber geben, weil (10) jede Gröſse ſovielmal kann genommen werden, als man will.

Oder Fig. 1. werde a durch $\frac{2}{3}$ dividirt, ſo heiſst dieſs, man ſoll die Gröſse, als Einheit, ſuchen, wovon die a = $\frac{2}{3}$ iſt. Es heiſse die geſuchte Einheit q; ſo iſt der 3te Theil von q 2mal in a; alſo muſs man um q zu finden, a in 2 Theile theilen, und ſo einen Theil 3mal nehmen; es iſt q in dieſem Beiſpiele b. Die Möglichkeit hievon iſt auch (in 10.) erwieſen, indem von jeder Gröſse jeder beliebigvielte Theil beliebigvielemale kann genommen werden.

Allgemein aber wird dieſs ſo bewieſen:

Iſt die zu dividirende Gröſse eine beſtimmte Zahl von der geſuchten Einheit, ſo iſt die letztere an ſich auch eine beſtimmte Zahl von der zu dividi-

renden Gröſse, alſo ein beſtimmtes Vielfache von derſelben; es wird alſo an ſich betrachtet auch in der Diviſion ein beſtimmt-Vielfaches der zu dividirenden Gröſse conſtruirt, nur daſs es als Einheit betrachtet wird; welches letztere aber in der Natur der Sache nichts ändert. Da nun jedes Vielfache (oder jede Zahl) einer jeden Gröſse beſtimmten realen Werth hat (10), und in jeder Diviſion ein ſolches conſtruirt wird, ſo läſst ſich wirklich mit jeder Gröſse und jeder Zahl die Diviſion verrichten.

Die Diviſion werde durch 2 Punkte angedeutet, vor welchen die zu dividirende Gröſse (der Dividendus, das Einzutheilende) und nach welchen die dividirende Zahl (Diviſor, der Theiler) geſetzt wird; die gefundene Einheit aber heiſse der Quotus oder Quotient. Z. B. $a : \frac{2}{3} = \frac{3}{2}\ a$.

Wir werden in der Folge ſehen, warum für den Ausdruck eines Verhältniſſes und eines Quotienten das gleiche Zeichen gewählt werden kann; daher auch gewöhnlich a..b, nach meinem Vorſchlage, bezeichnet wird, a:b, wie: a dividirt durch b. Bei mehreren folgenden Unterſuchungen aber würde Zweideutigkeit durch die Gleichheit dieſer Zeichen entſtehen.

Der Multiplicandus, ſo auch der Diviſor kann auch ſchon eine Zahl einer anderen Einheit ſein; dann entſpringt zugleich die Aufgabe das Product oder den Quotienten in derſelben Einheit auszudrücken; dieſs muſs bei den Rechnungsarten betrachtet

tet werden, ist aber zum Wesen dieser Constructionen, das ist zum Begriffe derselben, nicht gehörig.

Wenn man eine Grösse (a) mit einer bestimmten Zahl (n) multiplicirt, und das Product (b) wieder mit derselben Zahl (n) dividirt, so erhält man die erste Grösse (a) wieder.

(Also im allgemeinen an: a = a).

Es sei z. B. Fig. 1. a zu multipliciren mit $\frac{3}{2}$, so erhält man b; dividirt man nun b (das Product aus a und $\frac{3}{2}$) mit $\frac{3}{2}$, so erhält man a; denn man muss b als die Zahl $\frac{3}{2}$ ansehen und die Einheit dazu suchen, welches also dieselbe ist, aus welcher ja erst b als die Zahl $\frac{3}{2}$ durch Multiplication construirt wurde. Im allgemeinen also ist der Beweis:

denn weil von a aus das Product, als die Zahl n construirt worden, so kann das Produkt auch nur im Bezug auf diese Einheit a dieselbe Zahl sein.

Wenn man eine Grösse (b) mit einer beliebigen Zahl (n) dividirt, und den Quotienten (a) mit derselben Zahl multiplicirt, so erhält man wiederum b. (Also im Allgemeinen: (b:n) n = b; die Hacken bedeuten, dass b:n zusammen als Multiplicand angesehen werden solle).

Z. B. Fig. 1. werde b dividirt mit $\frac{3}{2}$, hernach der Quotient a mit $\frac{3}{2}$ multiplicirt.

Denn wenn b mit n dividirt wird, so ist sie nothwendig von der gefundenen Einheit allein diese bestimmte Zahl; daher also durch die Multiplication mit derselben Zahl in den Quotien b selbst wiederkommen muss.

Bei der Multiplication also sucht man die Zahl und hat ihre Einheit; bei der Division hat man eine Grösse als Zahl,

und

und sucht dazn die Einheit; und es sind diese Operationen sich gerade zu in der Richtung der Construction, nicht aber in dem Wesen der Construction verschieden, denn in beiden Fällen werden 2 Glieder eines endlichen Verhältnisses construirt.

Jede Gröfse heifst in Bezug auf jede andere ein Vielfaches, weil jede aus der andern kann gebildet werden; auch ist demnach die Kleine von der Grofsen ein Vielfaches, und es ist also ein Vielfaches nicht allemal gröfser als die Gröfse, als dessen Vielfaches es angesehen wird. Ist nun das Verhältnifs des Vielfachen zu seiner Einheit endlich, so kann es in Zahlen ausgedrückt werden, und es sind daher auch alle Zahlen Ausdrücke eines bestimmt-Vielfachen vom Ganzen; da nun bei der Multiplication Vielfache oder Zahlen construirt werden, so mufs nicht allemal ein Gröfseres zum Produkt sich finden als die Einheit (der Multiplicand) ist; je kleiner der Multiplicator, je kleiner das Produkt.

Jede Gröfse, die als Vielfaches von einer andern angesehen wird, wird als Theil derselben betrachtet, und es kann daher ein Theil (überhaupt) gröfser sein als das Ganze; daher auch liegt in der allgemeinen Anschauung der Division (Eintheilung) nicht, dafs die Einheit (der Quotient) der als Theil der zu dividirenden Gröfse betrachtet wird, kleiner als der Dividendus sein müsse. Je gröfser der Divisor, je kleiner der Quotient.

Wenn der Multiplicator und Divisor als eine Zahl gesetzt wird, so können die Glieder unendlicher Verhältnisse nicht durch Multiplication und Division aus einander werden.

Denn

Denn diese Glieder unendlicher Verhältnisse haben kein gemeinsames Mafs, verhalten sich nicht wie Zahlen.

Ob aber der Begriff der Multiplication und Division nicht dahin zu erweitern, dafs an ihre Stelle auch, Bestimmtheit der Vielfachheit gesetzt wird, welche unendlich dem Zahlenausdrucke entflieht, wird in der Folge entschieden werden müssen. Dann hiefse *multipliciren* soviel, als: von einer Gröfse als Einheit irgend ein Vielfaches (ein endliches oder unendliches, nehmlich für den Zahlenausdruck) bilden; und *dividiren* hiefse: eine Gröfse als irgend ein Vielfaches (ein endliches oder unendliches) ansehen und dazu die Einheit suchen.

Von logischen Gröfsen gilt nur mit der (10.) gezeigten Beschränkung, dafs sie mit jeder Zahl multiplicirt und dividirt werden können.

Vielweniger wenn der Begriff der Multiplication und Division, wie im letzten Zusatze, bestimmt würde; denn dann fallen alle unendliche (für den Zahlenausdruck, oder idealische) Multiplicatoren und Divisoren weg (7).

Auch diefs ist ein Beweifs, dafs die Arithmetik von jeher stetige Gröfsen vorausgesetzt habe, wenn sie sich auch Wissenschaft discreter Gröfsen genannt hat.

12.

Da die stetige Gröfse ihrem Begriffe und ihrer Anschauung nach ins Unendliche theilbar ist, so kann sie auch nicht nur nach allen möglichen Zahlen in beliebig viele gleiche Theile, sondern auf unendlich vielerleiweise d. i. in unendlich vielerlei Verhältnissen, worunter, wenn es über-

 haupt

haupt dergleichen giebt, auch unendliche ſind, in 2, in 3, in 4, in 5..... in n Theile theilen; welche Theile alle nicht im Weſen, ſondern nur in Gröſse verſchieden ſind. Weil nun das letztere iſt, ſo kommt auch auf die Ordnung der Theile, in welcher ſie das Ganze geben, durchaus nichts an, weil von aller Verſchiedenheit der Gröſse der Art nach abſtrahirt wird. Auch wenn man für einen Theil der ganzen Gröſse einen andern gleich groſsen ſetzt, ſo verliert dadurch das Ganze nichts, ſondern bleibt ganz daſſelbe.

Z. B. in Fig. 1. kann man die m, woraus a und b beſteht, in beliebiger Ordnung ſtellen, auch die 2 in a befindlichen m in b nehmen, wenn man dafür 2 dergleichen in b herausläſst, und es bleiben doch die Ganzen, a und b, unverändert.

So auch Fig. 4. kann man in b die Stücken c, d, e, f ſetzen, wie man will; wenn man ſie nur alle nimmt, und ihre Gröſse nicht verändert, ſo bleibt b dieſelbe.

Hierdurch wird die gemeine Definition der Arithmetik einigermaſsen gerechtfertigt, wenn man nehmlich, wider den urſprünglichen Sprachgebrauch, für discrete Gröſsen ſolche ſetzt, deren Theile unbeſchadet des Ganzen geordnet werden können, wie es beliebt, weil von der Art der Gröſse ganz abgeſehen wird, alſo von beſtimmter Beſchränkung in Abſicht auf die Ordnung der Theile durch Conſtruction von Gröſsen beſtimmter Art in der allgemeinen Gröſsenlehre, in ſofern die einzelnen Gröſsen blos als ſolche betrachtet werden, nicht die Rede ſein kann.

Auch bei logiſchen Gröſsen, wenn es Individuen ſind, welche im Begriffe ganz gleich geſetzt ſind, kommt gar nichts

auf

auf die Ordnung der Einzelnen an, man kann auch ein jedes Individuum für das andere ſetzen.

13.

Doch iſt es eine wichtige Unterſuchung, von je einer beſtimmten Anzahl gegebner Endlicher aller Art, die eben in ihrer Endlichkeit groſs ſind (von beſtimmt vielen Elementen oder Einzelnen), anzugeben, wie vielerlei dem Gehalte nach verſchiedene Verbindungen (Combinationen) zu 1, 2, 3, 4 n Einzelnen aus den gegebnen Einzelnen, und wie viele blos der Form oder der Ordnung nach verſchiedene Verbindungen (Permutationen) d. i. wie viele Verſetzungen bei 1, 2, 3, 4, ... n Einzelnen möglich ſeien; oder auch dieſe beiden Fragen in ihrer Vereinigung: wie viele dem Gehalte und der Form nach verſchiedene Verbindungen (Complexionen) für jede mögliche Menge von gegebnen Einzelnen aller Art es gebe.

Daſs *dieſe* Unterſuchung in die Mathematik gehöre, iſt daraus klar, weil das Verſetzen und Verbinden Form der Endlichkeit iſt; denn das Unendliche, weil es grenzenlos iſt, läſst ſich, als ſolches, weder verſchiedentlich verbinden noch verſetzen. Daſs ſie aber der Arithmetik verwandt ſei, iſt daraus deutlich, daſs die Verbindungen und Verſetzungen logiſche oder discrete Gröſsen ſind, deren endliche Beſtimmtheit und Vielheit hierin betrachtet wird. Weil ferner das Verbinden und Verſetzen bei allem möglichen Endlichen, auch bei Zahlen, Gliedern der Verhältniſſe u. ſ. w. angeht, ſo iſt deutlich, daſs dieſe Betrachtung in die allgemeine Mathematik gehöre. Da wir nun die Arithmetik als allgemeine Mathematik, als Gröſsenlehre überhaupt definirt haben, ſo müſſen wir auch dieſe Unterſuchung, welche die Combinationslehre genannt wird, zur Arithmetik zählen, und es beſteht demnach die Arithmetik aus 2 Theilen, die ſich wechſelſeits vorausſetzen, aus

 der

der Wissenschaft der allgemeinen Eigenschaften der Grösse als solcher im Verhältnisse (gewöhnlich sogenannte Arithmetik), sodann aus der wissenschaftlichen Beantwortung der genannten Fragen über die Anordnung und Verbindung von allen möglichen Grösen zu einander (Combinationslehre).

Man pflegt gewöhnlich sehr zweckmäsig Endlich-Einzelne aller Art (Elemente), welche Species, begriffliche Individua, so auch stetige Grösen aller Art sein können, durch die Buchstaben in alphabetischer Ordnung zu bezeichnen. Sind unter diesen Elementen solche, welche mit sich selbst verbunden gedacht werden können, welches bei begrifflichen Grösen angeht, so entstehen Verbindungen und Versetzungen mit Wiederholungen; widrigenfalls Verbindungen und Versetzungen ohne Wiederholungen.

Die Combinationslehre ist bei aller inductiven Betrachtung, und überhaupt da, wo alle mögliche Fälle erschöpft werden sollen, unentbehrlich, besonders aber für die erschöpfende Betrachtung der mathematischen Wissenschaften selbst. Sie setzt in ihrer weiteren Fortsetzung die Zahlenlehre, und die Zahlenlehre und Verhältniselehre hinwiederum in ihrer Weiterbildung die Combinationslehre voraus. Daher werden zwar in diesem Theile nur die ersten Elemente der Combinationslehre Platz finden können, allein im dritten, in welchem die Arithmetik fortgesetzt werden wird, werde ich auch die Combinationslehre fortsetzen, so weit als es auch dort möglich sein wird.

Wegen des zuvor unbefriedigten Bedürfnisses einer sehr weit umfassenden allgemeinen Charakteristik ist die Combinationslehre erst, soviel mir bekannt, von

den

den neuern Mathematikern, z. B. Leibnitz, Hindenburg und einigen anderen vollendeter bearbeitet worden.

13.

Wenn man irgend eine Sphäre von ſtetiger Gröſse, als Linie, Fläche, Körper u. ſ. w., von ihrem negativen Ideale aus, in ihrem ganzen Weſen bildet, conſtruirt und ſtetig wachſen läſst, ſo kann man in dieſer Conſtruction vergröſsernd fortgehen, ſo weit man will, ohne je das Unendliche zu erreichen (8), aber auch durch den entgegengeſetzten Act der Conſtruction das Conſtruirte wieder vernichten, und ſo zuletzt zum Nichts zurückkommen. Weiter kann die umgekehrte Conſtruction nicht gehen, und ein Kleineres als Nichts kann nicht gegeben werden, indem vielmehr das Nichts nicht einmal klein zu nennen. Wenn man bei der Reconſtruction beim Nichts ankommt, iſt ſchon jedes Kleinſte überſprungen.

Z. B. in der Fig. 10. laſſe zugleich vom willkührlichen Punkte a aus die gerade Linie b c entſtehen, ſo erreichſt du die unendliche Linie nie; geſetzt nun, es ſei die Linie e f eben gebildet, ſo kannſt du aufhören nach beiden Seiten fortzuziehen, und vielmehr von beiden Seiten bis in a, d. i. bis auf Nichts die Linie e f einziehen. Kleiner kannſt du e f nicht machen, denn der Punkt iſt ſchon nichts; innerhalb des Punktes iſt keine Linie mehr.

Oder Fig. 11. laſſe vom Mittelpunkte c eine Scheibenfläche immer wachſen, und immer wachſen; ſo erreichſt du das Unendliche dieſer Art, die unendliche ebne Fläche nie. Du kannſt aber auch bei der Peripherie a b ſtehen bleiben, und nun rückwärts bis in den Punkt c die Peripherie ſich verengen laſſen, bis

ſie

sie also und ihre Scheibe vernichtet ist. Weiter kann das Vernichten oder Reconstruiren nicht gehen.

Oder denke Fig. 11. c als Mittelpunkt einer Kugel, und die Kugel um ihn vom Nichts stetig wachsend, so weit du willst, so wird der unendliche Raum nie erreicht. Von irgend einer Gröfse der Kugel kannst du sie aber auch wieder stetig in ihr Nichts zurückziehen, nicht aber weiter.

Wenn aber irgend eine stetige Gröfse von ihrem negativen Ideale aus nicht in ihrer ganzen unendlichen Totalität, sondern nur einseitig und zum Theil construirt wird, so kann man, wenn man durch die entgegengesetzte Construction die einseitig aus ihr construirte Gröfse vernichtet, also das Nichts wieder erreicht hat, durch dieselbe entgegengesetzte Constructionsart die andere vorhin ausgeschlofsne Sphäre der ganzen Sphäre der stetigen Gröfse ins Unendliche construiren.

Z. B. die gerade Linie, wie bc Fig. 12, kann sowohl nach der einen Seite hin, als nach der andern, also durch zwei sich entgegengesetzte Constructionsarten, construirt werden; einmal nach + zu, sodann auch nach —; diese beiden Constructionsarten sind in ihrem Gehalte, und in ihrer Form ursprünglich die gleichen, nur sich vermöge der Richtung und *dadurch* entgegengesetzt, dafs sie einseitig sind. Denn fange die einseitige Construction nach + hin an in a (denn eben darum mufs sie in irgend einem Punkte anfangen, weil sie endliche Construction ist, denn sonst müfste sie von der unendlichen Linie ausgegangen sein, welches sinnlos ist): so kommst du zwar immer weiter nach +, allein die andere Sphäre der Linie von a nach —, gleich unendlich mit der nach +, entflieht ewig dieser

Con-

Conſtruction. Oder fange an von a nach — zu zu conſtruiren, ſo entflieht dieſer Conſtruction ewig die andere Sphäre nach +. Aber der Punkt a iſt willkührlich; in jedem Punkte der Linie z. B. e, kann jede der beiden Conſtructionsarten erwählt werden, von denen die eine gerade ſo reell und an ſich gerade die gleiche iſt, als die andere. Es ſei alſo der erſte willkührliche (abſolute) Anfangspunkt der Conſtruction a; von a conſtruire nach + die Länge a e; ſo kannſt du nun von e aus weiter vorwärts (+) gehen; du kannſt aber auch rückwärts, in der entgegengeſetzten Conſtructionsweiſe, nach — hin, jede Länge conſtruiren; gehe z. B. von e aus, um e d rückwärts, ſo iſt die rückwärts (—) conſtruirte Linie ſo gut Linie als jede die nach + gezogen wird, allein von a aus nach + betrachtet iſt ſie zerſtörend, vernichtend; es bleibt nun nach + nur noch die Länge a d übrig, gehſt du auch dieſe wieder zurück (—), ſo biſt du nach a, in das Nichts, in Bezug auf das Vorrücken von dieſem willkührlichen Anfangspunkte d aus, zurückgelangt; allein nichts hindert, weil die Linie auch nach — unendlich iſt, von a aus noch weiter nach — zu gehen, z. B. bis f; dann biſt du alſo nicht nur um Nichts, von a aus vorwärts gekommen, ſondern überdem noch um a f zurück, und zwar durch dieſelbe Conſtruction (der gleichen Richtung), wodurch das Erſtconſtruirte vernichtet wurde; iſt denn aber a f weniger als Nichts? Wovon denn Nichts? von Linie? aber an ſich iſt a f ſo gut Linie, als eine nach der Seite + von a aus gelegne. Oder in Bezug auf die Seite +? Soll dieſs Sinn haben, ſo muſs in dieſer Seite + ein Ziel der Conſtruction, z. B. in h geſteckt werden. Sollte nun in Bezug auf dieſs Ziel h der Punkt f in der Seite —, weniger als Nichts ſein, ſo müſste ich dadurch von ihm ins Unendliche entfernt ſein; das

aber ist nicht der Fall, denn g h ist so endlich als a h, und ich kann sogleich wieder von g aus durch Construction von g nach + hin h erreichen. Wenn ich also sagen wollte: in g sei für das Ziel h weniger als Nichts, so heifst diefs, wenn es etwas heifsen soll, nichts, als: g ist von h weiter entfernt, als mein erster Anfangspunkt a.

Setze nun, dafs Einer nach der Seite + hin von a aus gelangen möchte, welches ganz willkührlich ist: so wird er alle Längen, die nach dieser Seite hin construirt werden, für sich zweckmäfsig, bejahend, positiv nennen, alle aber die von irgend einem Punkte seiner stetigen Construction aus nach — hin gebildet werden, seinem Zweck entgegen verneinend, negativ; an sich aber fordert das Negative dieselbe Construction als das Positive, und ist, als Gröfse betrachtet, vom Zwecke der einseitigen Construction abgesehen, ganz gleichgeltend, in sofern es als Gröfse überhaupt betrachtet wird. Eben so gut hätte die andere Seite als bejahend, und die erstere als verneinend angesehen werden können.

Diejenigen Gröfsen, welche nach dem einseitigen Ziele der einseitigen Construction hin construirt werden, sollen *positive, bejahende* heifsen, und mit + bezeichnet werden; die aber die durch die entgegengesetzte Constructionsart entstehen, sollen *negative, verneinende* genannt, und durch — bezeichnet werden. Beiderlei, in sofern sich entgegengesetzt, und auf den einseitigen Zweck bezogen werden, sollen *entgegengesetzte Gröfsen* heifsen.

So ist z. B. Fig. 12.

$+ ad + de + eh - hd - df = - af$

Man-

Man kann auch Fig. 13, α. von demſelben Anfangspuncte a nach + oder — ſo viele Gröſsen conſtruiren, als man will; z. B.

poſitiv: + a b + a c + a d.
negativ: — a e — a f — a g.

Da beſteht jede für ſich, wird blos auf das Ziel überhaupt bezogen, und vernichtet die andere nicht. Es können aber auch dieſe Linien in eine ſtetige Conſtruction vereinigt (zuſammengedacht) werden; alſo werde erſt + a b genommen, dann von dieſem Endpunkte aus + a c, dann von dieſer Stelle weiter + a d, hernach vom Punkte d aus — a e, von e aus — a f, und endlich von f aus — a g: ſo iſt das Reſultat das kleine poſitive Stück vom erſten Anfangspunkt a aus bis γ; es iſt alſo

$$+ab + ac + ad - ae - af - ag = + a\gamma.$$

Vor allem wollen wir die Reſultate dieſer Betrachtung zuſammenfaſſen, um ſie ſelbſt zweckmäſsig fortſetzen und im Allgemeinen erſehen zu können.

Um zur Entgegenſetzung zu gelangen, muſs man die Linie nur einſeitig conſtruiren, und von einem willkührlichen Anfangspunkte anheben; welche Richtung man die poſitive nennen wolle, iſt ganz willkührlich. In beiden Richtungen kann man ohne Ende fortfahren. Denkt man poſitive und negative Gröſsen zuſammen, das iſt, nimmt man ſie in *eine* ſtetige Conſtruction auf, ſo vernichten ſich in Bezug auf das geſetzte Ziel poſitive und negative Gröſsen, welche gleich ſind; wird aber auch das Reſultat negativ, ſo hat man nicht weniger als Nichts, ſondern man iſt blos noch weiter vom Ziele weg, als man anfangs im abſoluten und willkührlichen Anfangspunkte auch war.

Wenn

Wenn 2 Gröſsen, von verſchiedenen Zeichen, ungleich ſind, ſo vernichten ſie ſich, in wiefern ſie gleich ſind, der Unterſchied (die Differenz, der Reſt) beider iſt daher von der Art (vom Zeichen) der gröſseren.

Z. B. Fig. 14. ſei $b > a$. Beide werden mit verſchiedenem Zeichen geſetzt, $+a$, $-b$, und vom abſoluten Anfangsp. α aus zuſammengeſetzt: ſo vernichtet $-b$ in ſo weit es $= a$, $+a$; und da $b > a$, ſo kommt man noch um dieſen Uiberſchuſs c von α aus negativ.

Oder es werde b poſitiv, a aber negativ genommen, ſo wird das Reſultat auch $= c$, oder gleich dem Uiberſchuſſe, dieſer aber wird $+$.

Die verglichenen Stücken können gegen einander in endlichem oder unendlichem Verhältniſſe ſtehen, weil dieſs alles von ſtetigen Gröſsen, überhaupt als ſolchen, gilt.

Die Zahlen drücken im allgemeinen jedes endliche Verhältniſs aus, ohne die individuelle Gröſse ſeiner Glieder zu beſtimmen; daher iſt deutlich, was poſitive und negative Zahlen für Gröſsen der Art unſeres Schema ſagen wollen; z. B. $+6$ heiſst, irgend eine Linie 6 ganzemale poſitiv genommen; -3 heiſst irgend eine Linie 3 ganzemale negativ genommen. Werden aber poſitive und negative Zahlen zuſammen gedacht, ſo beziehen ſie ſich beſtändig auf eine und dieſelbe Einheit (9), und man kann daher auch nach derſelben Einheit im allgemeinen das Reſultat ihrer Vereinigung denken; z. B.

$+5-3=+2$
$+7-9=-2$
$-3-2=-5$
$+4+3=+7$

Es kommt bei dem Zuſammendenken entgegengeſetzter Gröſsen gar nichts, in Abſicht des Reſultats, darauf an, in welcher Ordnung man ſie zuſammendenkt, wenn man ſie nur alle nimmt, und keiner Gröſse verändert.

Denn es kommt beim Zuſammendenken der Gröſse überhaupt (ohne Entgegenſetzung) auf die Ordnung nichts an (12), und was die Entgegenſetzung betrifft, ſo vernichtet die negative gleichviel poſitives, ſie mag eher oder ſpäter gedacht werden, oder es mag mit ihr dieſe oder jene poſitive Gröſse verglichen werden, denn es folgt dieſs aus der Natur dieſer Gröſsen, welche an ein zeitliches eher oder ſpäter nicht gebunden iſt.

Beiſpiel in Linien, Fig. 15.:

Von α aus nimm $+a$, dann die gröſsere $-b$; du erhältſt $-c$.

Oder nimm von α aus erſt die gröſsere $-b$, dann die kleinere $+a$, ſo kommt dieſelbe $-c$.

Beiſpiele in Zahlen:

$+5-3=-3+5=+2$
$+2-3-7=-7+2-3=-7-3+2=-8$
Man kann daher auch erſt alle poſitive und auch alle negative Zahlen zuſammennehmen, und beide Reſultate hernach zuſammendenken.
$+2-3+5-7-2+9+11=+27-12=+15.$

Bei-

Beispiele in Buchstaben, welche also sowohl commensurable als incommensurable Stücken bedeuten:

$+a-b+c$
$+a+c-b$
$-b+a+c$ alle 6 Stellungen geben Gleiches.
$+c+a-b$
$-b+c+a$
$+c-b+a$

Oder auch:

$+a-b-a+b-c=+a-a+b-b-c=+a+b-a-b-c=-c$

Oder auch wenn jede oder mehrere solcher allgemeinen Grösen mehrere ganze oder gebrochnemale genommen werden, welches durch Vorsetzen dieser Zahlen angedeutet wird:

$+2a-\frac{1}{2}b-a+b+c=+2a-a+b-\frac{1}{2}b+c=+a+\frac{1}{2}b+c$

(Wenn eine positive Gröſse eine Reihe anfängt so pflegt man sie ohne Zeichen zu setzen, als

$a+b=+a+b$.

Wo aber hieraus Confusion entstehen würde, thut man besser $+$ davor zu setzen.)

Nur aber für das Resultat sind diese Versetzungen gleichgültig, in anderer Rücksicht die das Wesen entgegengesetzter Grösen nicht trifft, mag die eine Art bequemer sein als die andere (z. B. F. 15.)

Da nur 2 Glieder unserer Entgegensetzung sind (nur 2 vollkommen sich entgegengesetzte Richtungen) so ist die der entgegengesetzten entgegengesetzte Richtung (die der negativen negative, $--$) wiederum die der sie erst entgegengesetzt war (die positive, $+$), woraus ferner klar ist,

was

was durch dreifache, vierfache, . . . n - fache Entgegenſetzung für eine Richtung komme.

Z. B. F. 10. ſoll ich — gehen, ſo muſs ich nach b zu gehen, ſoll ich in der dieſer negativen Richtung negativen, d. i. — — gehen, ſo gerathe ich wieder in die poſitive nach c. Soll ich — — — gehen, ſo heiſst dieſs: nach b, nein nicht nach b ſondern nach c, nein, nicht nach c ſondern nach b, ich komme alſo negativ. An dieſem Schema kann man ſich folgende Sätze deutlich machen, die aus der Zweitheiligkeit der Entgegenſetzung folgen:

+ + = ja + = +
— — = nicht — = +
— + = nicht + = —
+ — = ja — = —
+ + + = ja, ja, + = +
— + + = nicht ja + = —
+ + — = ja, ja, — = —
— — — = nicht nicht — = + — = —
— — — — = + — — = + + = +
— — — — — — = + + — = —
— — — — — — — = + + + = +

(Alſo negative Zeichen in ungerader Anzahl, 1, 3, 5...., geben —, negative Zeichen in gerader Anzahl, 2, 4, 6, 8...., geben +.)

Es kommt nichts darauf an, in welcher Ordnung die Zeichen geſchrieben werden. Alſo z. B.
+ — — + — = + + — — — = — + + — — = + — = —

Zu einer poſitiven oder negativen Gröſse eine andere poſitive oder negative Gröſse hinzudenken mit dem Zeichen wie ſie *iſt*, heiſst letztere zu erſterer *addiren*; die letztere aber zur erſteren nicht ſo hinzudenken wie ſie iſt, ſondern auf

auf die entgegengsetzte Weise (mit dem entgegengesezten Zeichen), heisst: letztere von ersterer subtrahiren.

Also ist

zu $+ a + b$ addirt $= + a + b$; ($> a$).

von $+ a + b$ subtrahirt $= + a - + b = + a - b$; ($< a$)

zu $+ a - b$ addirt $= + a + - b = + a - b$; ($< a$)

von $+ a - b$ subtr. $= + a - - b = + a + b$; ($> a$)

zu $- a + b$ add. $= - a + b$; (eine kleinere negative Grösse als $- a$, d. i. $< - a$)

von $- a + b$ subtr. $= - a - + b = - a - b$; ($> - a$)

zu $- a - b$ add. $= - a + - b = - a - b$; ($> - a$)

von $- a - b$ subtr. $= - a - - b = - a + b$; ($< - a$)

Dem zu Folge

1) entsteht durch Addition nicht immer ein Grösseres, und durch Subtraction nicht immer ein Kleineres, sondern es kommt darauf an, ob Grössen mit gleichem oder entgegengesetztem Zeichen addirt oder subtrahirt werden;

2) kann man um Addition anzuzeigen, vor das Hinzuzudenkende immer $+$, um die Subtraction anzuzeigen aber $-$ setzen;

3) ist, etwas positives addiren gleich, dasselbe negative subtrahiren. Oder:

$+ a$ addiren $= - a$ subtrahiren;

$- a$ addiren $= + a$ subtrahiren.

Beispiele
in Zahlen und Linien:

$+16$	$+16$	$+16$
$+\ 8$ add.	$+\ 8$ subtr. $=$	$- +\ 8$
$+24$;	$+\ 8$	$+\ 8$

$+4$

$$\begin{array}{llll} & +\ 4 & & +\ 4 \\ & +\ 6\ \text{ſubtr.} & = & -+\ 6 \\ \hline & -\ 2 & & -\ 2 \end{array}$$ (Fig. 16.)

$$\begin{array}{llll} +\ 9 & +\ 9 & & +\ 9 \\ -11\ \text{add.} & -11\ \text{ſubtr.} & = & --11 \\ \hline -\ 2 & +20 & & +20 \end{array}$$ (Fig. 17.)

$$\begin{array}{llll} -\ 5 & -\ 5 & & -\ 5 \\ +\ 5\ \text{addirt} & +\ 5\ \text{ſubtr.} & = & -+\ 5 \\ \hline 0 & -10 & & -10 \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} -\ 3 & -\ 3 & & -\ 3 \\ -\ 2\ \text{add.} & -\ 2\ \text{ſubtr.} & = & --\ 2 \\ \hline -\ 5 & -\ 1 & & -\ 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} -\ 4 & & -\ 4 \\ -12\ \text{ſubtr.} & = & --12 \\ \hline +\ 8 & & +\ 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} +\ 6 & & +\ 6 \\ +\ 8\ \text{add.} & = & -\ 8\ \text{ſubtr.} \\ \hline +14 & & +14 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} -\ 6 & & -\ 6 \\ +\ 8\ \text{add.} & = & -\ 8\ \text{ſubtr.} \\ \hline +\ 2 & & +\ 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} +\ 6 & & +\ 6 \\ -\ 8\ \text{add.} & = & +\ 8\ \text{ſubtr.} \\ \hline -\ 2 & & -\ 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} -\ 6 & & -\ 6 \\ -\ 8\ \text{add.} & = & +\ 8\ \text{ſubtr.} \\ \hline -14 & & -14 \end{array}$$

Hier-

Hieraus iſt auch deutlich, was es heiſsen könne, wenn mehrere Gröſsen, welche ſelbſt von verſchiedenen Zeichen ſind, zu einander addirt, und von einander ſubtrahirt werden ſollen. Die zu addirenden behalten ihr Zeichen, die zu ſubtrahirenden verändern jede ihr Zeichen.

Bei der Bezeichnung dieſer Forderung ſetze für: *Addiren*, +; und für: *Subtrahiren*, —; und ſchlieſse alle die Gröſsen worauf ſich die Forderung bezieht in Hacken ein, um dieſs deutlich zu bezeichnen.

Beiſpiele

in Zahlen:

$$\begin{array}{l} \text{von } +9 \\ \quad +3-5+11 \text{ ſubtr.} \\ \hline \qquad 0 \end{array} = \begin{array}{c} +9 \\ -(+3-5+11) = \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} +9 \\ -3+5-11 \\ \\ \hline \qquad 0 \end{array} \quad \text{oder:} \quad \begin{array}{c} +9 \\ -(+3-5+11) \\ \quad -\;+\;- \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -5+3+8-1 \\ -(+5-3-8+3 \\ \hline -10+6+16-4 \end{array} = \begin{array}{r} -5+3+8-1 \\ -5+3+8-3 \\ \hline -10+6+16-4 \end{array}$$

Man thut wohl, erſt aus allen in Hacken befindlichen, ihre Summe zu ſuchen und ſie dann mit dem entgegengeſetzten Zeichen zu nehmen, wenn ſie ſubtr. werden ſollen; wie im letzten B.

$$\begin{array}{r} -5+3+8-1 \\ -(+5-3-8+3) \\ \hline -10+6+16-4 \end{array} = \begin{array}{r} -5+3+8-1 \\ -\quad(-3) \\ \hline 5+3+8-1+3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} +5 \\ --3 \\ \hline +8 \end{array} = \begin{array}{r} +5 \\ +3 \\ \hline +8 \end{array}$$

Beiſpiele

in Buchſtaben (wodurch jede mögliche Gröſse commenſurable u. inc, bedeutet wird):

$$\begin{array}{r} +a-b+c \\ -(+a-b+c \\ \hline o \end{array} = \begin{array}{r} +a-b+c \\ -a+b-c \\ \hline o \end{array}$$

$$\begin{array}{r} +m-2p-7q \\ -(+2m+3p+14q) \\ \hline -m-5p-21q \end{array} = \begin{array}{r} +m-2p-7q \\ -2m-3p-14q \\ \hline -m-5p-21q \end{array}$$

$$-a+b-(-3a+b+c)+2c-(2a-d)-d-c=$$
$$-a+b+3a-b-c+2c-2a+d-d-c=o$$

$$-(a+b-c)-b-(e+f-g)-g=$$
$$-a-b+c-b-e-f+g-g=$$
$$-a-2b+c-e-f=-a-2b+c-(e+f)$$

$$-(a-b+c)-(-b+e-f)=$$
$$-a+b-c+b-e+f=$$
$$-a+2b-c-e+f$$

Um dieſs ſich noch anſchaulicher zu machen, denke, Fig. 18, 2 Boten A und B welche nach entgegengeſetzten Zielen wollen; daher dem A + iſt, was dem B —, und umgekehrt. Sie wollen aber doch mit einander fort nach derſelben Seite. A geht $+5-3+7=+9$. Sagt er nun erſt zu B (der mit ihm fort ſoll), er ſolle + 5 gehen, ſo muſs dieſer nach ſeiner Art — 5 nehmen; ſagt A ferner, B ſolle — 3 gehen, ſo muſs B

 nach

nach ſeiner Art $+3$ nehmen; ſagt endlich A zu B, er ſolle noch $+7$ gehen, ſo muſs B nach ſeiner Art -7 nehmen; für B iſt alſo das Reſultat -9 nach ſeiner Art, welches ſelbe dem A $+9$ iſt, und es kommen beide mit einander fort. B muſs alſo alles was A ihm ſagt ſubtrahiren d. i. unter dem entgegengeſetzten Zeichen denken, ſonſt entfernt er ſich von A. Hätte ihm A ſogleich ſein Reſultat $+9$ geſagt, ſo hätte B auf einmal -9 nehmen müſſen, um mit ihm fortzukommen.

Findet nun bei jeder Sphäre ſtetiger Gröſse eine ſolche theilweiſe (einſeitige), vollkommen ſich entgegengeſetzte Conſtruction ſtatt (nehmlich nicht blos bei geometriſcher und mechaniſcher, ſondern auch bei dynamiſcher ſtetiger Gröſse), daher unter denſelben Beſtimmungen als in unſerem Schema: ſo gehört die Betrachtung entgegengeſetzter Gröſsen in die Arithmetik, widrigenfalls als eine Eigenſchaft nur *einiger* Gröſsen, nicht.

Ob das erſtere oder das letztere ſei, kann durch endliche Conſtruction in jeder möglichen Art von ſtetiger Gröſse (alſo inductiv), oder aus der allgemeinen Natur ſtetiger Gröſse, als ſolcher (alſo deductiv) erwieſen werden; beide Beweiſse aber können nur aus philoſophiſcher Begründung der Mathematik ſtammen; denn bei der Induction müſſen *alle* Species ſtetiger Gröſse betrachtet werden; welches aber *alle* Species derſelben ſeien, kann nur im Weſen des Genus und weiterer Syntheſis deſſelben, alſo nur philoſophiſch erkannt werden, indem erſt ſelbſt das Genus im höchſten Genus (in der höchſten Sphäre des Weltganzen) erkannt ſein muſs. Soll es aber deductiv erkannt werden, welche Erkenntniſs die vollkommenſte iſt, wenn ſie ſich durch Conſtruction verklärt, ſo iſt keine Deduction auſer durch Philoſophie möglich (I). Auch hieraus zeigt ſich alſo die

die Abhängigkeit der Mathematik von der Philoſophie, wenn ſie zu gründlicher Einſicht erhoben werden ſoll.

Es zeigt ſich die Realität dieſer Entgegenſetzung bei gemeiner Betrachtung, z. B. bei den Flächen (Fig. 19.), bei den Körpern (Fig. 20.), bei den Bewegungen (entgegengeſetzte Schweren z. B.); bei den innern (chemiſchen und organiſchen) Kräften entflieht ſie der gemeinen Betrachtung.

Setzt man alſo als durch Philoſophie erwieſen voraus, daſs in jeder Sphäre ſtetiger Gröſser, ſei ſie eine *räumliche* oder *dynamiſche*, eine zweigliedrig - vollkommen - entgegengeſetzte theilweiſe Conſtruction (nicht nur ſubjectiv für das Erkennen, ſondern auch objectiv, für das Bilden ſtetiger Gröſse an ſich, wie in entgegengeſetzten Farben, entgegengeſetzter Schwere) ſtatt finde, von welcher gilt:

a) daſs ſie in urſprünglicher Gleichſetzung ihres Gehaltes entzweit iſt;

b) daſs es willkührlich iſt, welche von beiden man poſitiv und welche man negativ nennen will;

c) daſs man in jeder beliebigen Stelle (nicht allein räumlich) der ganzen Sphäre die einſeitige Conſtruction beginnen, ſie fortſetzen könne wie weit man wolle, aber auch wo man wolle das Conſtruirte reconſtruiren, und durch die erſten Anfangsſtelle hindurch (durch das relative Nichts, relative 0 in die entgegengeſetzte Sphäre, ſo weit man wolle, hineinconſtruiren könne:

So gilt das in unſerem Schema Erkannte, von ihm abgeſehen, im Allgemeinen von jeder ſtetigen Gröſse aller Art, und es gehört die Abhandlung entgegengeſetzter Gröſsen allerdings in die allgemeine Mathematik oder in die Arithmetik (I).

Und es wird hiebei sowohl die positive als negative Sphäre unendlich gesetzt und unermeſslich, weil die Arithmetik überhaupt (2) eine durchaus unendliche Sphäre stetiger Gröſse voraussetzen muſs.

Es wird hierdurch aber nicht ausgeschlossen, daſs nicht bei bestimmten Constructionen bestimmter Arten von Gröſsen, welche dadurch (2.) auf bestimmte Weise endlich ausfallen, auch, wenn in ihnen Entgegensetzung der Gröſse als solcher ist, die eine oder die andere Sphäre (die positive oder negative) oder beide endlich sein könnten (welches der Fall ist, wenn es davon ein Gröſstes, *maximum*, giebt). Das muſs dann allemal aus der Art der Construction hervorgehen; die allgemeine Voraussetzung unendlicher Sphären der Entgegensetzung wird dann immer die Theorie endlicher entgegengesetzter Sphären umfassen. Ich bemerke hier nur die verschiedenen dabei möglichen Fälle; + bedeute die positive; — die negative Sphäre (wobei nicht zu vergessen, daſs es willkührlich, welche von beiden + oder — heiſsen solle):

I, + und — wachsen ohne alle Grenzen, sind absolut unendlich;

II, + und — haben ihr Gröſstes, sind also endlich;

1) + erreicht das Gröſste, — nicht,
2) beide erreichen es,
3) beide erreichen es nicht.

III, + ist unendlich; — aber endlich, hat sein Gröſstes;

1) — erreicht sein Gröſstes,
2) — erreicht sein Gröſstes nicht.

Wird die Construction der bestimmten Sphäre noch vielseitiger (wie Fig. 21, wo die Linien bm = o, cm, dm,

dm, em, fm $=$ o; die in Bezug auf die $\gamma\mu$, $\delta\mu$, $\varepsilon\mu$ negativ sind, durch mehrmaliges relativ Gröfstes hindurch endlich ihr Kleinstes $=$ o finden), so werden solcher Fälle immer mehrere.

Ich belege diese Fälle hier nicht mit Beispielen, weil denen, die schon geübter sind, von selbst genug aus der Geometrie z. B. einfallen werden, den Andern aber sie doch nicht gründlich verständlich wären. Im dritten Theile dieses Werks wird auch diese Lehre von der Entgegensetzung weiter bestimmt werden.

Weil logische Gröfsen als solche im Begriffe schlechthin einerlei gesetzt und auf die gleiche Art construirt werden müssen, so findet auch die betrachtete Entgegensetzung bei ihnen durchaus nicht statt; also auch nicht bei Vielheiten (Zahlen) ihrer Individuen. Da man aber jede Vielheit derselben immer um 1 verkleinern kann, bis auf o, so kann man diese Verkleinerung auch durch — anzeigen, ohne Verwirrung zu verursachen; z. B. 8 Bäume — 5 Bäume (als Bäume) $=$ 3 Bäume.

8 — 9 Bäume aber (als solche, begrifflich betrachtet), oder — 1 Baum hat keinen Sinn. Werden aber, wie bei einem Baue etwa, Bäume als Material das ist als stetige Gröfse betrachtet: so hat z. B. 8 — 13 Bäume (von bestimmtem Holzgehalt) $=$ — 5 Bäume, Sinn; wenn z. B. A dem B 8 — 13 Stämme schuldig wäre, so müfste ihm B noch 5 Stämme liefern.

Man pflegt die Entgegensetzung der Gröfsen durch Schulden und Vermögen zu erläutern, und es ist diefs Beispiel nicht undienlich. Die allgemeine Sphäre, worin Vermögen und Schuld jedes Bürgers im Staate existirt, ist der Inbegriff alles Brauchbaren, welcher in diesem Lande vorhanden ist (der aber selbst wieder, wenn ihm andere Staaten entge-

gen-

gengesetzt sind, untergeordnete Sphäre ist, und demselben Verhältnisse des Vermögens und der Schuld unterworfen). Das allgemeine Zeichen desselben und eines bestimmten Theiles davon ist: *Geld.* Von diesem allgemeinen Vorrathe kommt jedem Bürger, um die Thätigkeit in seinem bestimmten Berufe, für jeden bestimmten Zeitraum seines Lebens ein bestimmter Theil in Natur oder in Gelde zu, welches seinen rechtmäßsigen Verdienst ausmacht. Geht sein Leben mit seinem Verdienste gleichlaufend fort, so daſs sein Theil mit dem Leben aufgeht, so kommt er aus und hat weder Vermögen noch Schuld. Geht aber sein Leben schneller fort, als sein Verdienst, so bleibt sein Verdientes dahinten, und da er doch leben muſs, so muſs ihm der Staat oder ein Privatmann entweder etwas schenken (ohne Gegenarbeit zu verlangen), oder ihm etwas borgen um die Arbeit die er erst noch thun soll; er muſs also um ins Gleiche zu kommen seine Kräfte verstärken. Verdient er aber mehr als er verbraucht, so eilt sein Verdienst seinem Leben vor, und er hat im gewöhnlichen Sinne Vermögen, das ist er braucht nun so lange Zeit nicht zu arbeiten, wenn er nicht will, als das Verdienst vorgeeilt ist. Und es ist sich also Vermögen und Schuld auf folgende Art entgegengesetzt: das was der Einzelne in Bezug auf den jetzigen Moment seines Lebens noch in den öffentlichen Vorrath liefern muſs, ist für ihn Schuld (für den öffentlichen Vorrath aber, wenn auf das Nachholen des Einzelnen gewiſs gerechnet werden kann, in gewisser Rücksicht Vermögen); was aber auf den jetzigen Moment des Lebens aus der allgemeinen Sphäre noch hereinkommen soll (habe er es noch mit Recht zu fordern oder das baare Geld) ist ihm Vermögen. Der beständige Beziehungspunct der Entgegensetzung ist also der jetzige Moment des Lebens des Bürgers, und die Sphäre worin die Entgegensetzung geschieht, das allgemeine Staatsgut. Hieraus ist deutlich, daſs man nicht sagen könne: Schulden seien weniger als Nichts, denn das Geborgte

borgte wird ja ſo gut verwandt als das Verdiente, auch kann durch Arbeit das Gleichgewicht wiederhergeſtellt, ja auch Vermögen erreicht werden, wenigſtens ſteht der Schuldner von dem Gleichgewichtspuncte (relativ o) nicht in unendlicher Entfernung. Es iſt daher auch gleichgültig zu ſagen: zu ſeinem Vermögen Vermögen addiren, oder: von ſeinem Vermögen Schulden ſubtrahiren; alſo z. B. zu 6 Rthlr. 5 Rthlr. addirt = von 6 Rthlr. 5 Thaler Schulden ſubtrahirt = 11 Rthlr. Vermögen; denn ſubtrahiren heiſst auch hier, unter entgegengeſetzten Zeichen hinzudenken. Wenn dem A 10 Rthlr. Schulden aufgebürdet (addirt) und zu ſeinem Vermögen hinzugedacht (d. i. ſogleich berichtigt) werden, ſo verliert er 10 Rthlr.; wenn man ihn aber von 10 Rthlr. Schulden befreit (ſubtrahirt), die er doch hätte bezahlen müſſen, ſo erhält er wirklich die 10 Rthlr. die er eben hätte bezahlen müſſen.

14.

Um das Verhältniſs ſtetiger Gröſsen gegen einander zu beſtimmen, kann auf ihre Zeichen (13) nicht Rückſicht genommen werden.

Denn inſofern Gröſsen ſich entgegengeſetzt ſind, werden ſie als verſchiedenartig angeſehen (wiewohl ſie an ſich, ohne Entgegenſetzung, betrachtet ſtets gleichartig ſind), inſofern aber Gröſsen im Verhältniſſe betrachtet werden, müſſen ſie durchaus gleichartig ſein: alſo können auch Gröſsen mit entgegengeſetzten Zeichen als ſolche kein Verhältniſs haben. Soll alſo von einem Verhältniſſe derſelben die Rede ſein, ſo müſſen ſie in ihrer Gleichartigkeit, alſo auſer ihrer Entgegenſetzung, in ihrer abſoluten Gröſse aneinander gehalten werden. Daher haben auch poſitive Gröſsen daſſelbe Verhältniſs gegen einander als negative; welches auch (9) von Zahlen gilt.

Alſo

Alſo $a..b = -a..-b = +a..-b = -a..+b$.

Alles alſo, was poſitiven Gröſsen in Abſicht ihres Verhältniſſes zukommt, kommt den negativen Gröſsen mit ihnen gemeinſchaftlich zu.

15.

Alle Gröſsen ſind *Theile* derjenigen Gröſse, welcher ſie, zuſammengedacht, gleich ſind, mögen die Theile nun poſitiv oder negativ ſein.

Jede Gröſse wird in Theile zerlegt, wenn Theile von ihr weggedacht werden; oder wenn man Gröſsen angiebt, welche zuſammengedacht ihr gleich ſind, mögen dieſe Theile nun poſitiv oder negativ ſein.

Denn im allgemeinen wird unter dem Ganzen das verſtanden, was Anderen zuſammengenommenen gleich iſt. Wenn alſo auch Gröſsen mit entgegengeſetzten Zeichen zuſammengedacht werden, ſo entſteht ihr Ganzes. Wird aber aus einer Gröſse irgend eine andere herausgedacht (ſubtrahirt) ſo iſt das Uibrige und das Herausgedachte ihr gleich, alſo ihre Theile.

So iſt alſo 8 Ganzes der Theile $2 + 3 + 3$, oder von: $12 - 4$; oder $5 - 7 + 11 - 1$.

Oder wenn von -7 ſubtrahirt wird -3 ſo bleibt übrig -4; es iſt alſo -7 das Ganze von -4 und -3; denn $-4 + -3 = -7$.

Es läſst ſich alſo jede poſitive Gröſse als Theil jeder poſitiven Gröſse betrachten.

Denn iſt der Theil gröſser als das Ganze ſo nimm die gehörige Negativgröſse hinzu.

Z. B.

Z. B. 11. ſei Theil von 8; ſo ſubtrahire 11 von 8; ſo kommt heraus -3; dieſs iſt alſo mit 11 der andere Theil von 8; denn $11 + -3 = 8$.

Iſt er aber kleiner als das Ganze, ſo ſuche die gehörige Poſitivgröſse.

Z. B. von 15 ſei ein Theil 7, ſo iſt der andere 8; und wird gefunden, wenn von 15 ſubtrahirt wird 7.

Es läſst ſich auch jede negative Gröſse als Theil von jeder poſitiven anſehen.

Denn man ſubtrahire die negative Gröſse von der poſitiven, ſo erhält man den andern Theil.

Z. B. es ſei -7 der eine Theil von $+3$, ſo iſt der andere $= +3 - (-7) = +3 + 7 = +10$; denn es iſt $-7 + 10 = +3$.

Es läſst ſich auch jede poſitive Gröſse als Theil jeder negativen anſehen.

Denn man ſubtrahire damit in das Ganze ſo erhält man den andern Theil.

Z. B. $+15$ ſei Theil von -7; ſo iſt $+15$ von -7 ſubtrahirt $= -22$; aber $+15 - 22 = -7$.

Es läſst ſich auch jede negative Gröſse als Theil jeder negativen Gröſse anſehen.

Denn man ſubtrahire ſie vom Ganzen, ſo erhält man den andern Theil.

Z. B. -11 ſei Theil von -1; ſo iſt -11 ſubtrahirt von $-1 = +10$; es iſt aber auch $-11 + 10 = -1$.

Alſo

Alſo läſst ſich jede Gröſse mit jedem Zeichen als Theil jeder Gröſse mit jedem Zeichen betrachten.

Folgt aus den 4 bewieſenen Fällen.

Man kann jede Gröſse ſie ſei ſo klein oder ſo groſs als ſie wolle, in ſo viele für ſich ſo groſse Theile theilen als man will, wenn man entgegengeſetzte Gröſsen zuläſst.

Denn man ſuche 2 Theile, aus jedem wieder 2 Theile, u. ſ. f. ins U.; und nehme dazu zum erſten Theile an, welche Gröſse man will.

So iſt z. B. — 1 Ganzes folgender Theile
+ 9 — 12 + 4 — 2

(Man kann noch ſo viele poſitive und negative Gröſsen als Theile von a annehmen, wenn ſie nur zuſammengenommen a geben.)

Das Ganze heiſst auch *Summe* ſeiner Theile, und ſeine Theile deren *Poſten;* wenn man aber vom Ganzen einen Theil nimmt, ſo heiſst in dieſer Hinſicht das Ganze *das zu Verringernde* (Minuendus), der herauszunehmende Theil das *Abzuziehende* (Subtrahendus), und der hierzu mitergänzende Theil der *Unterſchied* (des erſten Theils zum Ganzen), *Differenz*, *Reſt*.

So iſt z. B. — 7 Summe von + 10 — 17. Und wenn — 7 Minuendus und dazu — 17 Subtrahendus iſt, ſo iſt der Reſt + 10.

Die Summe wird alſo durch Addition der Poſten, der Unterſchied 2er Gröſsen aber durch Subtraction des Subtrahendus vom Minuendus gefunden.

Wenn

Wenn der Subtrahendus aus mehreren Poſten beſteht, ſo werden alle ſubtrahirt, das iſt unter dem entgegengeſetzten Zeichen zum Minuendus gedacht.

Z. B. der Unterſchied von + a und — c + d — e — f iſt = + a + c — d + e + f; und es iſt die Summe von + a + c — d + e + f und — c + d — e — f = a.

Die Summe des Unterſchiedes und des Subtrahendus iſt der Minuendus; denn durch das Herausnehmen des Subtrahendus aus dem Minuendus wird der andere Theil des Minuen- gefunden.

Daher iſt die Addition des Reſts und des Abgezogenen Probe des Reſtes, wenn das Ganze kommt.

Die eine Poſt von dem Ganzen ſubtrahirt giebt die andere ergänzende, als den andern Theil.

Es iſt alſo die Subtraction einer Poſt aus der Summe die Probe für die Summe, wenn die andere Poſt kommt.

(Ein Theil der durch ganze Wiederholungen unter demſelben Zeichen ſein Ganzes miſst, heiſst deſſen *aliquoter* (Fig. 2, a von b) Theil; ein Theil aber der nicht durch ganze Wiederholungen ſein Ganzes miſst, heiſst deſſen *aliquanter* Theil (Fig. 1, a von b).

Im unendlichen Verhältniſſe alſo iſt ein Glied vom andern immer ein aliquanter Theil; ſo wie es auch in ihm keinen einzigen Theil giebt, welcher von beiden Gliedern ein aliquoter Theil wäre; weil ſonſt ein ſolcher Theil ein gemeinſames Maſs ſein müſste, dergleichen es, der Vorausſetzung zu Folge im unendlichen Verhältniſſe nicht giebt (7).

16.

16.

Nicht nur Gröſsen als ſolche, heiſsen (13) entgegengeſetzt, ſondern Alles das iſt ſich entgegengeſetzt, was dem Weſen nach gleich, nur gerade auf die entgegengeſetzte Weiſe gebildet iſt. Es kann daher auch jede Entgegenſetzung durch + und — angedeutet werden.

Z. B. Fig. 1. hat a und b an ſich nur *ein* beſtimmtes Verhältniſs; ſoll es aber erkannt werden, ſo muſs entweder a oder b als Vorderglied angeſehen werden, daher ſind ſich auch die beiden Verhältniſſe

a . . b und b . . a

entgegengeſetzt; weil ſie daſſelbe auf entgegengeſetzte Weiſe bilden und anſchauen. Wird nun a . . b poſitiv geſetzt ſo, iſt b . . a ihm negativ. Es kann daher

— (a . . b) bedeuten b . . a (d. i. ſein neg. Verhältniſs).

Und es iſt ferner

$$-\,-(a\,..\,b) = -(b\,..\,a) = a\,..\,b.$$

Gleichergeſtalt ſind ſich Zahlen als Ausdrücke von Verhältniſſen entgegengeſetzt; und man findet die entgegengeſetzte Zahl, wenn man die, deren entgegengeſetzte man ſucht, auf Bruchgeſtalt bringt, und den Bruch (das Verhältniſs) umkehrt (10, 11).

Z. B. von $3 = \frac{3}{1}$ iſt die entgegengeſetzte $\frac{1}{3}$ von $\frac{2}{3}$ iſt die entgegengeſetzte $\frac{3}{2}$

und im allgemeinen:

(wenn m und n jede Zahl bedeutet) von $\frac{n}{m}$ die entgegengeſetzte $\frac{m}{n}$.

17.

Eine Gröfse (a) mit irgend einer Zahl $\frac{m}{(n)}$ multipliciren ist dasselbe, als erstere mit der entgegengesetzten Zahl $\left(\frac{n}{m}\right)$ dividiren (11).

Z. B. Fig. 1. a mit $\frac{3}{2}$ multiplicirt giebt b. Auch a mit $\frac{2}{3}$ (der entgegengesetzten von $\frac{3}{2}$ (15)) dividirt giebt b.

Im allgemeinen wird diefs so bewiesen:

Denn wenn a mit $\frac{m}{n}$ multiplicirt wird, so wird von a der n-te Theil m-mal genommen, also wird a als Hinterglied, und das Product (welches b heifsen soll) als Vorderglied des Verhältnisses angesehen, das a zu b hat. Soll nun umgekehrt a mit irgend einer Zahl dividirt, auch b gehen, so wird a als Vorderglied des Verhältnisses angesehen, wozu b das Hinterglied sein soll; diefs Verhältnifs a..b ist das umgekehrte (16) von b..a; wenn daher b $=$ $\frac{m}{n}$ von a, so mufs umgekehrt a $=$ $\frac{n}{m}$ von b sein. Sieht man also a als $\frac{n}{m}$ von b an, indem b unbekannt ist, d. i. dividirt man a durch $\frac{n}{m}$ (11), so mufs man ebenfalls b erhalten. Nun aber ist $\frac{n}{m}$ von $\frac{m}{n}$ die umgekehrte Zahl, also ist erwiesen, w. z. e. w.

Eine Gröfse (a) mit einer Zahl $\left(\frac{m}{n}\right)$ dividiren, giebt das Gleiche (q) als auch die erstere (a) mit der entgegengesetzten Zahl $\left(\frac{n}{m}\right)$ dividiren.

Denn

Denn wird a mit $\frac{m}{n}$ dividirt, so ist a Vorderglied, und q Hinterglied des construirten Verhältnisses, und a ist $\frac{m}{n}$ von q. Wird aber das Verhältniss q..a betrachtet, welches das entgegengesetzte von a..q ist; so ist q umgekehrt $\frac{n}{m}$ von a; wenn demnach a mit $\frac{n}{m}$ multiplicirt wird, erhält man auch q; es ist aber $\frac{m}{n}$ die entgegengesetzte Zahl von $\frac{m}{n}$ (15), also ist erw., w. z. e. w.

Demnach ist

$$a . \frac{m}{n} = a : \frac{n}{m}; \text{ und}$$

$$a : \frac{m}{n} = a . \frac{n}{m}.$$

Diess gilt beides von logischen Grössen, in wieweit von ihnen (5) die Multiplication und Division gilt.

Von nun an wird auf den Gegensatz stetiger und logischer Grössen nicht mehr Rücksicht genommen.

Wir fassen nur stetige Grössen von jetzt an ins Auge, und verstehen von selbst, was auch den vorigen Sätzen zu Folge von logischen Grössen gelte, und was nicht. Denn die Natur der stetigen Grösse begreift die der logischen in sich (I, 5.).

17.

Wenn ein Verhältniss der Ungleichheit gegeben ist, so siehe, um dasselbe zu finden, das kleinere Glied (a) als

Vor-

Vorderglied und das gröſsere (b) als Hinterglied an. Nimm das kleinere Glied (a) aus dem gröſseren (b) ſo viele ganzemale weg, als angeht; giebt das kleinere (a) mehrere ganzemale genommen, das gröſsere (miſst a, b aus), ſo iſt das kleinere gemeinſamer Maſsſtab für a und b und das Verhältniſs beider iſt gefunden. Bleibt aber bei dieſer Vergleichung von a mit b ein Reſt (α), ſo vergleiche wieder dieſen Reſt mit der kleineren Gröſse (a) und nimm ihn daraus hinweg ſo viele ganzemale, als möglich; miſst dieſer Reſt das kleinere Glied (a), ſo miſst er auch das gröſsere b, und das Verhältniſs von a∴b, iſt gefunden, und läſst ſich in Zahlen ausdrücken. Miſst aber der Reſt (α) das kleinere Glied (a) nicht, ſo entſteht hieraus ein neuer Reſt (β); dieſen vergleiche wieder mit dem erſten Reſte, miſst er den erſten aus, ſo miſst er auch die Glieder des Verhältniſſes, miſst er ihn nicht aus, ſo entſteht ein neuer, dritter Reſt (γ); dieſen vergleiche wieder mit dem zweiten (β), und verſuche ob er ihn miſst, oder ob ein vierter Reſt (δ) bleibt; iſt letzteres, ſo vergleiche den vierten Reſt (δ) auf gleiche Weiſe mit dem vorigen dritten (γ)..... und ſo fahre fort, bis einmal der neue Reſt den nächſt vorigen durch ſeine ganzen Wiederholungen ausmiſst. Miſst aber ein beſtimmtvielter Reſt den nächſtvorigen aus, ſo behaupte ich, daſs er auch alle vorige, folglich die Glieder des geſuchten Verhältniſſes ausmeſſe, und ihr gemeinſamer Maſsſtab ſei, daher dann auch das geſuchte Verhältniſs endlich oder commenſurabel iſt, und die Glieder deſſelben Zahlen von dem gefundenen gemeinſamen Maſsſtabe ſind. Wären aber beide Glieder gegen einander incommenſurabel, ſo könnte man durch noch ſo weites Fortſetzen der beſchriebenen Vergleichung doch kein gemeinſames Maſs finden, es müſste alſo ins Unendliche immer ein neuer Reſt entſtehen, denn widrigenfalls wären beide commenſurabel, wider die Vorausſetzung.

Das auf dieſe Weiſe gefundene gemeinſame Maſs iſt das gröſste, welches es giebt (menſura communis maxima), und man findet dadurch den kleinſten Zahlenausdruck für das geſuchte Verhältniſs.

Die aufeinanderfolgenden Reſte, α, β, γ, δ, ε...... werden immer kleiner, und im unendlichen oder idealiſchen Verhältniſſe nehmen ſie endlos ab, ohne je das Nichts zu erreichen.

Für unendliche Verhältniſſe läſst ſich durch die gezeigte Vergleichung immer ein Zahlenausdruck finden, der dem wahren Verhältniſſe immer näher und näher kommt, ohne es jedoch ganz zu erreichen. Das iſt, wenn man nach einander a, α, β, γ, δ, ε.... zum gemeinſamen Maſse von a . . b annimmt, ſo erhält man immer ein dem unendlichen Verhältniſſe näheres endliches Verhältniſs.

Ein allgemeiner Ausdruck dieſes Verfahrens (wenn n jede mögliche ganze Zahl, und an verſchiedener Stelle auch verſchiedene ganze Zahlen bedeutet) iſt folgender:

$$\underline{a}$$
$$b = na + \underline{\alpha}$$
$$a = n\alpha + \underline{\beta}$$
$$\alpha = n\beta + \underline{\gamma}$$
$$\beta = n\gamma + \underline{\delta}$$
$$\gamma = n\delta + \underline{\varepsilon}$$

u. ſ. w.

denn erſt wird hiebei a..b, dann α..a, dann β..α, dann γ..β, dann δ..γ,..... geſucht.

Wenn

Wenn ein Verhältnifs ein identifches (4) ift, fo ift es eben darum fchon bekannt.

Wenn aber nicht beim Verhältniffe der Ungleichheit das Verhältnifs der beiden Glieder durch ihre Vergleichung, ohne ein anderes Glied hinzuzunehmen, erkannt werden kann, fo kann es überhaupt nicht erkannt werden (denn davon dafs wirklich immer ein Verhältnifs an fich *ift*, ift nicht die Rede). Denn wenn das Verhältnifs von a..b vermittelft einer dritten Gröfse c erkannt werden follte, fo müfste man doch fowohl das Verh. von a..c als auch von b..c kennen, wonach eben allererft die Frage ift. Wenn aber erkannt ift, wie aus 2 Gliedern ohne Hülfe eines dritten ihr Verhältnifs erkannt wird, fo wird auch hieraus das letztere felbft hervorgehen, auch wird dann die Frage beantwortet werden können, wie das Verhältnifs von 3, 4, 5, 6....n Gliedern gegen einander gefunden werden könne. Das ift z. B. welches fei a..b..c..d..e......

Da alfo das Verhältnifs von 2 Gliedern a..b nur aus ihnen gefunden werden foll, fo kann diefs blos durch ihre Vergleichung gefchehen, und da in ihnen nichts als ihre beftimmte Gröfse enthalten ift, fo mufs blos ihre Gröfse verglichen werden; welches nur gefchehen kann, wenn man das kleinere Glied an das gröffere hält, und unterfucht ob das gröfsere Glied aus ganzen Wiederholungen des kleineren beftehe oder nicht. Man fieht alfo hiebei die kleinere Gröfse als Vorderglied und die gröfsere als Hinterglied an.

Man fucht zwar bei diefem Verfahren eine dritte Gröfse, welche fowohl a als b mifst, nehmlich ihren gemeinfamen Mafsftab, allein man fetzt ihn nicht anfangs mit individueller Gröfse voraus.

Bayerische Staatsbibliothek München

Ehe ich die gegebne Anweifung durch Beifpiele deutlich mache, und den allgemeinen Beweifs vollende, mufs ich zuförderft 2 Hülfsfätze beweifen:

Ein Mafs irgend einer Gröfse kann in unferm Falle nicht gröfser fein als die Gröfse felbft, welche es meffen foll. Da nun das gemeinfame Mafs für a und b beide meffen mufs, fo kann es nicht gröfser fein als die kleinere Gröfse, welche hier immer als a, d. i als Vorderglied angefehen wird.

An fich, das ift ohne die Natur der Vergleichung 2er Glieder eines Verhältniffes zu bedenken, kann jede Gröfse nach jedem Mafsftabe gemeffen werden. Ift nun die gemefsne kleiner als ihr Mafs, fo mufs man doch wiffen, wie vielmal die kleinere in dem Mafse liegt, alfo mufs man doch urfprünglich die kleinere als Mafs der gröfseren anfehen, und eher kann man nicht umgekehrt wiffen, wieviel die kleinere, von der gröfseren als Mafs, betrage. Da nun, wenn das Verhältnifs gefunden ift, beide Glieder wechfelfeits als Mafs und Gemefsnes betrachtet werden können (weil fie Zahlen voneinander (9)), aber nicht eingefehen werden kann, wie das Gröfsere Mafs des Kleineren, wenn man nicht erft weifs, wie das Kleinere Mafs des Gröfseren fei, fo folgt: dafs man zuförderft die kleinere a als Mafs von b betrachten, das ift fehen müffe, wievielemale a in b liege, wo dann a gröfstens fein eignes Mafs wäre, das ift von fich felbft als Einheit das Einfache. Oder: fowohl a als b kann nicht kleiner fein als das gemeinfame Mafs, alfo ift daffelbe gröfstens = a.

Diefelbe Gröfse, ift von einer anderen gröfseren ein kleineres von einer anderen kleineren ein gröfseres Vielfaches. Oder:

Oder: das Gröſsere iſt in Demſelben wenigeremale als das Kleinere (jenes Gröſseren) gelegen.

Es heiſse das Kleinere γ, das Gröſsere α; ſo bleibt etwas übrig, wenn man die kleinere von der gröſseren hinwegdenkt, dieſer Reſt heiſse δ. Wenn nun beide erſt α, dann γ an eine und dieſelbe Gröſse (β) als Maſs gehalten werden, ſo ſetze daſs $\beta = n\alpha$, d. i. einer beſtimmten Menge von α; ſo enthält jedes α, $1\ \gamma + \delta$; alſo iſt $\beta = n\gamma + n\delta$; da nun auch γ noch mit $n\delta$ verglichen werden muſs, als dem anderen Theile von β; und auch $n\delta$ ein beſtimmtes Vielfaches von γ iſt; ſo folgt daſs β von γ ein höheres Vielfaehe als das n-fache ſei; alſo die kleinere in *derſelben* mehreremale als die gröſsere liege.

(z. B. Fig. 22. iſt γ mehrmale in β als α)

Je gröſser alſo der gemeinſame Maſsſtab, der durch die fortgeſetzte Vergleichung gefunden wird, je kleinere Viefache, das iſt je kleinere Zahlen deſſelben werden a und b. Der gröſste gemeinſch. Maſsſtab zu beiden wird alſo ihr Verhältniſs in kleinſten Zahlen geben. Da nun kleine Zahlen ſich beſſer überſehen und aus dem Ganzen (der Einheit) bilden laſſen (weil die Einheit wenigeremale darin) als groſse, ſo wird man auch darauf denken müſſen, ſogleich nicht irgend eines, ſondern das gröſste gem. Maſs für a und b zu entdecken.

Ich zeige nun das Verfahren unſeres Lehrſatzes in Beiſpielen:

a) Es ſoll F. 23. das Verh. a . . b geſucht werden. Es werde a mit b verglichen, und ſo vielmale weggenommen, als möglich. Es iſt aber a in b 2 ganzemale gelegen, alſo a ſelbſt das gemeinſame

Mafs für a..b, alfo das gröfste. Das gefuchte Verh. ift alfo commenfurabel, und in kleinften Zahlen = 1..2.

b) Man fuche ferner F. 24. a..b. Nimm a aus b fo vielemale als möglich; a ift in b 1 ganzesmal enthalten, und noch ein Theil davon, nicht aber 2mal; alfo ift b > 1a aber < 2a. Alfo fällt das wahre Verhältnifs a..b zwifchen 1..1 und 1..2. Wenn man alfo nicht das Verhältnifs von dem Uiberfchufs über 1a in b, welches α oder der erfte Reft heifsen foll, zu a kennt, fo kennt man auch nicht a..b; wüfste man aber das Verhältnifs von α..a, fo wüfste man auch a..b; denn fetze das gemeinf. Mafs von α..a = μ; fo mifst μ α und a, alfo auch b, welche b aus lauter a und einem α befteht, weil erft a aus b fo viele ganzemale genommen wurde, als möglich. Man vergleiche alfo wiederum α mit a, und nehme α aus a, fo vielemale als möglich. Nun ift a = 2α, alfo α..a = 1..2; alfo mifst α auch b; und a..b = 2..3. Auch ift α nothwendig kleiner als a, weil man fonft nochmals a davon weggenommen hätte; und ferner α der gröfste gemeinfame Mafsftab für a..b. Denn es mufs derfelbe a und b meffen; alfo ift er gröfstens a; aber er mufs auch a und α meffen, alfo ift er gröfstens α. Der allgemeine Ausdruck diefes Verfahrens

$$\frac{a}{b = na + \frac{\alpha}{a = n\alpha}} \quad \text{ift alfo hier} \quad \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

c) Suche Fig. 25 a..b. Nimm a aus b fo vielemale als möglich, fo ift a in b 1mal, nicht aber zweimal;

mal; es fällt alſo a..b zwiſchen 1..1. und 1..2 Der erſte Reſt α, kleiner als a, müſste alſo nun etwa der gröſste Maſsſtab für a..b ſein, denn a iſt keiner, alſo muſs der gröſste Maſsſtab für a..b, auch α meſſen, alſo gröſstens kann er α ſein; daraus folgt aber noch nicht, daſs er ein ſolcher ſei; dieſs iſt zu unterſuchen, indem man ferner α..a beſtimmt, alſo die kleinere α mit a vergleicht; da findet man daſs α die a nicht durch ganze Wiederholungen miſst, alſo ein neuer Reſt bleibt, der vom Anfange an der zweite iſt; er heiſse β. Sieht man nicht auf β, ſo verhalten ſich a..b wie $1\alpha..2\alpha = 1..2$. Aber man muſs auf β ſehen, weil das Verhältniſs der *ganzen* a und b ſoll gefunden werden. Man ſuche alſo das Verhältniſs $\beta..\alpha$, ob etwa β α miſst, denn wenn dieſs wäre ſo mäſse β auch a, welches $a = 1\alpha + 1\beta$ iſt; alſo auch b, weil b aus 1a und 1α beſteht. Es wäre ferner β das gröſste gemeinſchaftliche Maſs für a und b, denn ein ſolches muſs ſowohl a als b meſſen, alſo auch den Unterſchied beider α; alſo ſowohl a als α, alſo auch den Unterſchied beider, β; alſo kann es gröſstens β ſelbſt ſein. Nun iſt aber in der Figur gerade $\beta = 2\alpha$; alſo miſst β ſowohl a als b als ihr gemeinſames gröſstes Maſs; daher $a..b = 3\beta..5\beta = 3..5$.

Nach unſerer Bezeichnungsart alſo iſt

$$\cfrac{a}{b = na + \cfrac{\alpha}{a = n\alpha + \cfrac{\beta}{\alpha = n\beta}}} \quad \text{im Beiſpiele} \quad \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}$$

Die

Die letzte Stufe stellt das Verhältniss von $\beta \,..\, \alpha$ oder $\frac{\beta}{\alpha}$ vor $= 1 \,..\, 2 = \frac{1}{2}$. Die beiden letzten Stufen aber das Verhältniss von $\alpha \,..\, a$ nach ihrem gemeinsamen Masse β ausgedrückt. Denn α ist $= 2\beta$, und $a = \alpha + \beta$ also $a = 3\beta$; also $\alpha \,..\, a = 2\beta \,..\, 3\beta = 2 \,..\, 3$. Es drückt also auch im allgemeinen:

$$2 \,..\, 3 \text{ und } \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}} \text{ das Gleiche aus.}$$

Alle 3 Stufen aber geben das Verhältniss von $a \,..\, b$ im Massstabe β. Denn $a = 3\beta$ und $b = a + \alpha$; aber $\alpha = 2\beta$; also ist $b = 3\beta + 2\beta = 5\beta$. Also ist $a \,..\, b = 3\beta \,..\, 5\beta = 3 \,..\, 5$. Demnach ist auch der Ausdruck

$$\cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}} = 3 \,..\, 5 = \tfrac{3}{5}.$$

Da die Zahlen das im allgemeinen, das ist abgesehen von individueller Grösse der absoluten Einheit (9) ausdrücken, was die Linien im individuellen geben: so hätten wir auch gleich die Zahlen 3 und 5 vergleichen, oder ihr Verhältniss durch die genannte Vergleichung suchen können; a also $= 3$ und $b = 5$; a in b 1mal $+ \alpha$; α also $= 2$; α ferner in a, das ist 2 in 3 wieder einmal, $+ \beta = 1$; 1 aber (β) in 2(α) geht auf, weil man nun in β die absolute Einheit (A) erreicht hat, wodurch alle ganze Zahlen durch ganze Wiederholungen commensurabel sind. Wir erhalten also durch diess Verfahren sogleich obstehenden Zahlenausdruck für $3 \,..\, 5$.

Um

Um Raum zu ersparen, und das Setzen zu erleichtern, wollen wir anstatt

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}$$ allemal schreiben:

$$\frac{1}{1} \;\bar{1}\; \frac{1}{1} \;\bar{1}\; \frac{1}{2}.$$

d) Fig. 26. sei a..b zu suchen; so ist a in b 1mal, der erste Rest ist α; α in a ist wieder einmal, und bleibt der neue Rest β; dieser ist wieder in α 1mal und giebt den neuen Rest γ; γ aber liegt gerade 2mal in β; also ist γ gröfster gemeinsch. Mafsstab für $\gamma..\beta$, $\beta..\alpha$, α..a, a..b, und der kleinste ganz genaue Zahlenausdruck für a..b ist 5..8; bleibt man bei der ersten Vergleichung stehen, so erhält man für a..b = 5..8 das Verh. a..a = 1..1; bleibt man bei α stehen, so erhält man das Verh. $1\alpha..2\alpha$ = 1..2; das wahre a..b liegt also zwischen beiden; geht man bis zu β fort bleibt aber bei β stehen, so erhält man für a..b (indem γ für nichts geachtet wird) $2\beta..3\beta$ = 2..3, welches also wieder nicht genau ist; nimmt man aber γ an, so erhält man a..b = 5..8 ganz genau. Man erhält also:

$$5..8 = \tfrac{5}{8} = \tfrac{1}{1} \;\bar{1}\; \tfrac{1}{1} \;\bar{1}\; \tfrac{1}{1} \;\bar{1}\; \tfrac{1}{2}.$$

e) Fig. 27. wird gesucht a..b; a in b ist 2mal, bleibt Rest α; α in a einmal, bleibt β; β in α einmal bleibt γ; γ in β einmal, bleibt δ; δ aber in γ gerade 3mal; es ist also δ das gröfste gemeinsame Mafs für $\delta..\gamma$ = 1..3; für $\gamma..\beta$ = 3..4; für $\beta..\alpha$ = 4..7; für α..a = 7..11; endlich für a..b

= 11

$= 11 .. 29$. Und die Näherungsverhältnisse, jenachdem a, α, β, γ, zum Masse genommen wird, für a..b sind: 1..2, 1..3, 2..5, 3..8, und das wahre 11..29.

Nunmehr wird anch der allgemeine Beweiss für die oben aufgestellten Behauptungen deutlich sein: dass die Reste immer kleiner werden, dass wenn ein Rest den nächstvorigen theile, er alle vorige, also auch a und b theile, und dass das so gefundene Mass das grösstmöglichste gemeinsame für a..b sei.

Man nehme unsern allgem. Ausdruck dieses Verfahrens vor Augen:

$$\begin{array}{l} \underline{a} \\ b = na + \underline{\alpha} \\ \quad a = n\alpha + \underline{\beta} \\ \qquad \alpha = n\beta + \underline{\gamma} \\ \qquad\quad \beta = n\gamma. \end{array}$$

(es wird darin angenommen, dass γ den vorigen Rest β theile, indem $n\gamma = \beta$ gesetzt wird, n aber jede mögliche ganze Zahl bedeutet.)

a) Da a aus b so vielemale genommen wird als möglich, so ist $\alpha < a$.

Da aber ferner α aus a genommen wird, so vielemale als möglich, so ist $\beta < \alpha$, um somehr $< a$.

Ferner, da aus α, β so vielemale genommen wird als möglich, so ist $\gamma < \beta$, um somehr $\gamma < \alpha$; noch mehr also $\gamma < a$; nochmehr $\gamma < b$.

Und

Und so fort ins Unendliche, wenn es anders mit diesen Resten ins Unendliche gehen kann, was erst in der Folge zu untersuchen.

Also $b > a > \alpha > \beta > \gamma > \delta > \ldots\ldots$

b) Da γ β misst, so misst es auch α, denn $\alpha = n\beta + \gamma$ (denn γ misst n mal β, das ist ein ganzes Vielfache von β, weil es das einfache β misst (9), aber auch γ, sich selbst). Da nun γ α misst, so misst es auch a, denn $a = n\alpha + \beta$ (denn es misst γ $n\alpha$ weil es α misst, und β, wie zuvor erwiesen). Da endlich γ a misst, so misst es auch b, denn $b = na + \alpha$ (denn γ misst na, weil es a misst, und α wie zuvor erwiesen). Und so bei 5, 6, 7 m Stufen, weil immer der nächsthöhere Rest aus n-mal den vorigen Rest und einmal den vorletzten Rest besteht.

c) Da der zu a..b gesuchte gemeinschaftliche Masstab, μ, a messen soll (weil er beide a und b messen soll), so muss er auch na messen, weil die Einheit ihre ganze Zahl misst; aber $b = na + \alpha$; da μ also die ganze b messen soll, und ihren Theil na misst, so muss μ auch ihren andern Theil α messen; also kann μ grösstens α sein; es muss also μ beide a und α messen; aber $a = n\alpha + \beta$, also muss auch μ den andern Theil von a nehmlich β messen, da er den ersten davon nehmlich $n\alpha$ misst; also kann grösstens $\mu = \beta$ sein; ist aber β nicht μ, so muss μ doch β und α messen; aber $\alpha = n\beta + \gamma$; also muss μ auch γ messen, also kann es grösstens γ sein, und so fort bis einmal, wenns möglich, ein neuer

neuer Rest wirklich der Maßstab des vorigen ist; dieser ist dann nicht nur, wie in b bewiesen worden, *irgend* ein gemeinsch. Maß für a..b, sondern das *größte*, was es überhaupt für a..b giebt.

Wiewohl also zwischen b und μ unendlich viele Größen dazwischen liegen, so kann doch keine von ihnen allen a und b messen, weil μ der größte Maßstab und kleiner als alle dazwischenliegenden ist (a).

Daher erhält man auch allemal a..b in kleinsten Zahlen durch die gezeigte Vergleichung.

Hier ist nun zuförderst die Frage, ob es Verhältnisse gebe und zwar wie sich versteht endliche, wo man den ersten, 2ten, 3, 4, 5, 6....n ten Rest als gemeinsames Maß endlich einmal findet. Ich will, da diese Frage hier nicht vollständig kann beantwortet werden, 2 solche Reihen von Verhältnissen in Zahlen hersetzen, wo das nächste Verhältniß immer durch eine Vergleichung mehr, gefunden wird.

$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \frac{13}{21}, \frac{21}{34}, \frac{34}{55}, \frac{55}{89}.....$

$\frac{1}{3}, \frac{3}{7}, \frac{7}{10}, \frac{10}{17}, \frac{17}{27}, \frac{27}{44}, \frac{44}{71}, \frac{71}{115}, \frac{115}{186}.....$

Beide Reihen laufen ins Unendliche.

Aber noch eine andere Frage ist, ob es Größen derselben Sphäre a und b geben könne; wo man, ich will nicht sagen bei der tausendsten oder millionsten, sondern bei gar

keiner

keiner Vergleichung, und wenn man in Ewigkeit zu vergleichen fortführe, einen Reſt finden würde, der a und b ganz genau mäſse; oder (7) ob es unendliche oder idealiſche Verhältniſſe gebe, die ſich demnach nie in Zahlen ausdrücken laſſen? Dieſe Frage muſs nach ſtrenger Methode nicht durch Aufweiſung ſolcher unendlicher Verhältniſſe in beſtimmter Conſtruction einer beſtimmten Art von Gröſse z. B. in der Geometrie, ſondern allgemein aus der Natur der ſtetigen Gröſse überhaupt gelöſst werden, durch allgemeine Conſtruction aber kann ſie es nicht, weil die arithmetiſche Conſtruction nie das ewige umfaſst (z. B. eine in Ewigkeit fortgeſetzte Vergleichung). Alſo kann, wie es ſcheint, dieſe Frage nur philoſophiſch gelöſst, und die unendlichen Verhältniſſe im Allgemeinen nur philoſophiſch erkannt werden. Die Geometrie conſtruirt wirklich unendlich vielerlei Arten incommenſurabler Gröſsen, welche man ſo bald man die Conſtruction eingeht, für reell anerkennen muſs.

Da diejenigen Verhältniſſe, welche, jenachdem man a, α, β, γ zum Maſse nimmt, für a und b, dem wahren Verhältniſſe von a..b auf eine beſtimmte Weiſe nahe oder fern ſein müſſen, ſo fragt ſich, ob denn dieſe Verhältniſſe alle dem wahren a..b ungleich ſind, und wenn ſie ungleich ſind, ob die folgenden etwa dem wahren Verhältniſſe immer näher kommen, bis endlich das wahre durch den wirklich gemeinſchaftlichen Maſsſtab erreicht wird; und wenn ſie ſich nähern, nach

welchem

welchem Gesetze etwa sie sich dem wahren a..b nähern?

Um diess auszumachen, ist zuförderst zu bestimmen, wodurch die Nähe oder Ferne, Gleichheit und ungleicheit, Grösse oder Kleinheit der Verhältnisse bestimmt wird.

Im Verhältnisse ist nur zu unterscheiden die Bestimmtheit der Vielheit homologer Glieder gegen einander; ist diese bestimmte Vielheit homologer Glieder in zweien Verhältnissen gleich, so heissen sie gleich gross, z. B. 1..2 = 3..6; ist diese aber ungleich, so schreibt man den beiden Verhältnissen verschiedenerlei Grösse zu, und man sieht also dabei auf die Grösse der Vielheit, welche homologe Glieder in Bezug auf einander sind; z. B. 1..2 ≷ 1..3 weil 2 von 1 das zweifache, 3 aber von 1 das dreifache ist. An sich ist es nun ganz gleichgültig, welches Glied man hiezu zum Masse wählen will; es ist aber natürlich, diese Grösse der Verhältnisse nach der Beschaffenheit des Vorderglieds gegen das Hinterglied zu bestimmen, weil doch allemal das Verhältniss des Vorderglieds zum Hintergliede ins Auge genommen wird. Je grösser oder beträchtlicher nun das Vorderglied gegen sein Hinterglied, desto grösser auch *das* oder vielmehr *dessen* Verhältniss. Also 1..2 > 1..3 > 1..4...., Denke also, um diess bestimmter anzuschauen

a) den terminus consequens b (Fig. 28.) unveränderlich, aber den term. antec. a vom Nichts entstehend, und stetig wachsend, bis ins Unendliche, so wird a gegen b immer beträchtlicher, kommt also immer dagegen in ein grösseres Verhältniss. Das ist

a*α*..b

$a\alpha..b < a\beta..b < a\gamma..b < a\delta..b <$

Wenn alſo das Vorderglied wächſt, und das Hinterglied bleibt, ſo wird dadurch das Verhältniſs ins Unendliche vergröſsert.

Und hieraus iſt zugleich klar, daſs, wenn es ſolche giebt, auch idealiſche Verhältniſſe mit endlichen in Vergleichung ihrer Gröſse kommen (wiewohl dieſelbe eben ſo wenig als die Glieder des unendlichen Verh. auf Zahlen kann gebracht werden, ſich alſo nicht angeben läſst, ein wie-Vielfaches das Vorderglied von ſeinem Hintergliede ſei). Denn es durchläuft a gegen b alle mögliche Verhältniſſe (8).

Ein Gröſseres hat alſo gegen Daſſelbe ein gröſseres Verhältniſs als ein Kleineres hat; z. B. $9..7 > 3..7$. Im allgemeinen $a+p..b > a..b$.

b) das Vorderglied unveränderlich, und das Hinterglied vom Nichts ins U. ſtetig wachſend; ſo wird (Fig. 29.), gegen b, a immer unbeträchtlicher, denn je gröſser b wird, je mehreremale liegt a in b, je kleiner alſo iſt a als b; wenn es gleich an ſich unverändert bleibt. Alſo iſt

$a..b\alpha > a..b\beta > a..b\gamma > a..b\delta >$

Wie alſo das Hinterglied zunimmt, ſo nimmt das Verhältniſs a..b ab; und wie umgekehrt das Hinterglied abnimmt, nimmt das Verhältniſs das Vorderglied dagegen zu.

Alſo auch Daſſelbe hat zu Gröſserem ein kleineres, und zu Kleinerem ein gröſseres Verhältniſs; z. B. $7..9 < 7..8$. Im allgemeinen

$$a..b+p < a..b.$$

c) beide

c) beide veränderlich, a und b; alſo

α) a ins U. wachſend, und b ins U. abnehmend; ſo wird wegen der Zunahme von a das Verhältniſs gröſser, ſo auch wegen der Abnahme von b (nach dem Vorigen unter a) und b)); alſo wird hiedurch das Verhältniſs in zwiefacher Hinſicht vergröſsert; z. B. F. 30. iſt $a\beta \,..\, b\delta$ in doppelter Hinſicht $>$ $a\alpha \,..\, b\gamma$.

Es hat alſo das Gröſsere zu dem Kleineren in doppelter Hinſicht ein gröſseres Verhältniſs als das Kleinere zu dem Gröſseren; alſo im allgemeinen, wenn $a \,..\, a+p$, $b \,..\, b+p$ gegeben ſind, wo p jede bejahte Gröſse bedeutet, ſo iſt

$$a+p \,..\, b >> a \,..\, b+p.$$

z. B. $9 \,..\, 11 >> 8 : 12$

β) a ins U. abnehmend und b ins U. wachſend; ſo wird durch erſteres das Verh. verkleinert, ſo auch durch letzteres; alſo wird es in doppelter Rückſicht verkleinert (a, b). Alſo hat das Kleinere zum Gröſseren ein in doppelter Rückſicht kleineres Verhältniſs, als das Gröſsere zum Kleineren. Allgemein

$$a \,..\, b+p << a+p \,..\, b.$$

z. B. $11 \,..\, 19 << 12 \,..\, 18$ oder $2 \,..\, 3$.
$17 \,..\, 7 << 18 \,..\, 6$ oder $3 \,..\, 1$.
$1 \,..\, 1 << 2 \,..\, \frac{1}{2}$.

γ) beide wachſend; ſo wird das Verhältniſs durch das Wachſen des Vorderglieds gröſser, durch das Wachſen aber des Hintergliedes kleiner.

δ) beide abnehmend; ſo wird durch das Abnehmen des Vordergliedes das Verh. kleiner durch das Abnehmen des Hintergliedes aber gröſser.

Hieraus

Hierans folgt weiter:

1) Wenn das Vorderglied, a, verdoppelt wird, so wird auch das Verhältniss noch einmal so gross (das heisst nicht: *das Verhältniss* wird *verdoppelt*, was etwas anders sagt; siehe weiter unten), oder vielmehr: so wird der term. antec. noch einmal so gross, als zuvor; wird das Vorderglied 3mal so gross genommen, so wird auch das Verhältniss desselben 3mal so gross. Allgemein, wenn das Vorderglied ver-n-facht wird, so kommt dasselbe auch in das n-fache Verhältniss zu seinem Hinterglied (b). Z. B. 5..7 steht in 5mal so grossem Verhältniss, als 1..7; 4..7 in doppelt so grossem Verhältniss als 2..7.

2) Wenn das Vorderglied, a, in n-Theile getheilt wird, so wird auch sein Verhältniss gegen dasselbe b in n-Theile getheilt (b) z. B. 3..7 steht in einem Verhältnisse, welches nur zum dritten Theil so gross ist, als 9..7.

3) Wenn das Hinterglied ver-n-facht wird, so wird dadurch das Verhältniss zum nten Theile herabgebracht (a); z. B.

3..5 3mal so gross als 3..15.
3..14 halbsogross als 2..7.

4) Wenn das Hinterglied in n-Theile getheilt wird, so wird dadurch das Verhältniss ver-n-facht (a); z. B.

19..21 ist den siebenden Theil so gross als 19..3.

Wir bedürfen nun für unsere Aufgabe, die Grösse der Näherungsverhältnisse gegen das wahre Verhältniss zu finden, noch folgender Sätze:

1) Wenn

1) Wenn zwei Paare von Grössen gegeben sind, a und b, α und β, von denen je 2, $a..\alpha$ und $b..\beta$ sich auf gleiche Weise verhalten (dass also $a..\alpha = b..\beta$): so sind auch die Summen (Ganzen) gleichnamiger Glieder in dem gleichen Verhältnisse (also

$$a+\alpha..b+\beta = a..b = \alpha..\beta.).$$

Denn $b+\beta$ ist $=$ b und β; insofern nun $b+\beta$ b ist, entsteht aus ihm a auf die gleiche Weise, als aus ihm, in sofern es β ist, auch α entsteht; $b+\beta$ ist aber nur b und β; wenn daher in Bezug auf $b+\beta$, $a+\alpha$ betrachtet wird, so entsteht auch aus $b+\beta$ die Grösse $a+\alpha$ auf dieselbe Weise, als aus b, a und aus β, α entstand. Denn was von *allen* Theilen der Ganzen gilt, das gilt von den Ganzen.

Da durch die Anschauung *Theil* (15) die Entgegensetzung der Grössen nicht ausgeschlossen ist, so können beide Paare addirt oder subtrahirt werden. Also

$$a+\alpha..b+\beta = a-\alpha..b-\beta = a..b = \alpha..\beta.$$

Nicht aber darf man eine Grösse subtrahiren die andere aber addiren, weil dann die Ganzen nicht auf gleiche Weise aus den Theilen gebildet würden.

Also ist nicht:

$$a+\alpha..b-\beta = a+\alpha..b-\beta$$

z. B. Fig. 31, wenn $\alpha..\beta = a..b$ so ist auch

$$\alpha+a..\beta+b = \alpha-a..\beta-b = \alpha..\beta = a..b.$$

Oder da $1..3 = 3..9$, so ist auch

$$1+3..3+9 = 1-3..3-9 = 1..3$$
$$4..\ 12 = -2..-6 = 1..3.$$

Hieraus

Hieraus folgt ferner:

2) Wenn von 2 Gliedern eines Verhältnisses a und b, von jedem eine Gröfse hinweggenommen wird, von a die α, und von b die β, und verhält sich die eine hinweggenommene α, zur andern hinweggenommenen, β, wie sich die Gröfsen a und b verhalten, von welchen sie genommen werden, das ist, wie a..b: so verhalten sich auch die Reste, wie die Ganzen, a..b.

Denn die Reste sind Ganze aus a, b und $-\alpha$, $-\beta$. Die Ganzen aber verhalten sich gerade so wie *alle* ihre Theile, wenn diese sich auf gleiche Weise gegen einander verhalten.

3) Wenn $a..b > \alpha..\beta$; so ist $a-\alpha..b-\beta > a..b$; oder $a..b < a-\alpha..b-\beta$.

Denn wenn $a..b > \alpha..\beta$, so ist a gegen b gröfser, als $\alpha..\beta$. Sollte aber $a-\alpha..b-\beta = a..b$ sein, so müfste α gegen β sich verhalten, wie a..b (nach dem Nächstvorigen); da nun aber, der Voraussetzung nach, α kleiner gegen β als a gegen b; so wird von a zu wenig genommen, wenn man von ihm α, und dabei von b, β nimmt. Wird aber von a, dem Vordergliede, zu wenig genommen, so wird es zu grofs gegen sein Hinterglied, also auch das Verhältnifs $a-\alpha..b-\beta$, gegen das erste a..b zu grofs.

Z. B. Fig. 32 ist $a..b = 2..3$ also $> \alpha..\beta$ welches $= 1..2$ ist. Nimmt man also von b, β weg, so sollte man wenn das Verhältnifs a..b nicht gestört werden soll, mehr als α, nehmlich $\alpha+\gamma$ (so dafs $\alpha+\gamma..\beta = 2..3$) von a wegnehmen. Nimmt man also nur α weg, so wird

a — α grösser gegen b — β, als es sein muss, wenn das Verhältniss a..b nicht soll gestört werden. Das Vorderglied also, a — α, wird zu gross, also das Hinterglied dagegen zu klein, das ist, das Verhältniss wird zu gross.

4) Wenn a..b $<$ α..β, so ist a — α..b — β $<$ a..b; oder a..b $>$ a — α..b — β.

Denn wenn a..b $<$ α..β, so ist a unbeträchtlicher gegen b, als α gegen β. Sollte aber a — α..b — β sich $=$ a..b verhalten, so müsste α so unbeträchtlich gegen β sein, als a gegen b. Nun aber ist, der Voraussetzung zu Folge, α grösser..β als a..b; also wird auch von a mehr genommen, als genommen werden sollte; also wird a — α..b — β $<$ a..b.

Z. B. Fig. 33. sei a..b $=$ 1..3, also $<$ α..β $=$ 2..3. Wird nun β von b genommen, so müsste auch von a $\frac{1}{3}$b genommen werden, wenn das gleiche Verh. als a..b kommen sollte. Da nun α $=$ $\frac{2}{3}$b $>$ $\frac{1}{3}$b, so wird durch α dem a mehr genommen, als sein darf, also wird a — α..b — β $<$ a..b.

5) Wenn α..β $>$ γ..δ, und beide Verhältnisse $<$ a..b: so ist a — α..b — β $<$ a — γ..b — δ.

Denn weil α grösser gegen β, als γ gegen δ; so wird, wenn man a — α..b — β und a — γ..b — δ nimmt, im ersteren Verhältnisse der a verhältnissmässig mehr entrissen, als im zweiten, also a im ersten kleiner gegen b als im zweiten; also auch das erste Verhältniss kleiner. Da nun beide Verhältnisse (17, 4). $>$ a..b: α — α..b — β aber $<$ α — γ..b — δ, so kommt α — α..b — β dem Verhältnisse a..b näher als a — γ..b — δ.

6) Wenn

6) Wenn $\alpha .. \beta > \gamma .. \delta$, und beide Verhältnisse $> a .. b$: so ist $a - \alpha .. b - \beta < a - \gamma .. b - \delta$.

Denn weil $\alpha .. \beta > \gamma .. \delta$, so ist α gegen β beträchtlicher, als γ gegen δ; Es wird also auch in $a - \alpha .. b - \beta$, der a mehr entrissen, als in $a - \gamma .. b - \delta$; da aber der a mehr entrissen wird, so wird a im ersten Verhältnisse gegen b kleiner als im zweiten, also auch $a - \alpha .. b - \beta < a - \gamma .. b - \delta$.

Beide, $a - \alpha .. b - \beta$ und $\alpha - \gamma .. b - \delta$ sind (nach 17, 3) kleiner als $a .. b$; oder gegen $a .. b$ zu klein; da aber $\alpha - \gamma .. b - \delta > a - \alpha .. b - \beta$; so steht auch $\alpha - \gamma .. b - \delta$ dem Verhältniss $a .. b$ näher, als $a - \alpha .. b - \beta$.

Im ersten Falle (5) erhält man also durch die Subtraction nach dem grösseren Verhältnisse, im zweiten aber (6) durch die Subtraction nach dem kleineren die grössere Näherung.

Das Verhältniss mit welchem andere als ihrem gemeinsamen Beziehungsgliede verglichen werden, heisse das *Grundverhältniss*, die darauf bezognen, mit ihm ihrer Grösse nach verschiedenen, dessen *Näherungsverhältnisse*.

Nunmehr können wir die Aufgabe lösen, die vom 17ten Lehrsatze noch übrig ist; ob denn die nach einander durch die gezeigte Vergleichungen gefundenen Verhältnisse dem wahren (Grundverhältnisse) sich nähern, und nach welchem Gesetze. Zuerst zwar in einzelnen Beispielen.

In Fig. 25. ist das Grundverhältniss $a .. b = 3 .. 5$. Das erste Näherungsverhältniss entsteht, wenn man sogleich

a als Maſs annimmt, alſo in b α wegläſst. In a wird nichts weggenommen. Darum wird b zu klein geſetzt, alſo iſt dieſs erſte Näherungsverhältniſs a..a = 1..1 gröſser als a..b, alſo zu groſs. Geht man zum zweiten Näherungsverh. fort, ſo nimmt man α als Maſs für a und b. So viele a in a und in b ſind, ſo viele β werden weggelaſſen; in beiden aber iſt a einmal, alſo wird auch aus jedem 1β weggelaſſen; demnach verhält ſich das Weggenommene, wie das erſte Näherungsverhältniſs; dieſs aber iſt gröſser, als a..b (das Grundverhältniſs); demnach muſs auch das Verhältniſs, welches aus dieſem Wegnehmen aus a..b entſteht, kleiner ſein als a..b (17, 4); das iſt, das zweite Näherungsverhältniſs, nehmlich 1α..2α = 1..2, iſt $<$ a..b. Da nun β gerade α miſst, ſo erhält man nun das Grundverhältniſs ſelbſt, d. i. 3..5. Alſo das erſte Verhältniſs der Näherung war zu groſs; das zweite zu klein, und das dritte iſt das Grundverhältniſs ſelbſt. Alſo 1..1 $>$ 3..5 $>$ 1..2. Welches Verhältniſs der Näherung aber iſt 3..5 näher, 1..1, oder 1..2? Ich behaupte das letztere; denn 1..1 entſtand daraus, daſs man von a und b nach dem Verhältniſſe 0..α (das iſt eigentlich gar nach keinem Verhältniſſe) wegnahm, welches das unverhältniſsmäſsigſte iſt; ſollte nun ein kleineres Verhältniſs auf dieſelbe Weiſe gefunden werden, ſo müſste, man vom Hinterglied b, auch gar nichts nehmen, ſondern blos vom Vorderglied ein Stück, welches ſich gegen a gerade verhält, wie α gegen b. So aber wurde 1..2 nicht gebildet, ſondern es wurde vom Vordergliede und Hintergliede das an ſich gleiche Stück β genommen; alſo nach dem Verhältniſſe 1..1, welches ein kleineres iſt, als das Verhältniſs 1..0, das eigentlich nicht einmal ſelbſt ein Verhältniſs ſondern die Grenze alles Verhältniſſes iſt, indem das Hinterglied ganz verſchwindet.

In

In F. 26. feien die Näherungsverhältniſſe des GV. 5..8 zu würdigen. Das erſte entſteht, wenn α für nichts geachtet wird, und iſt alſo $>$ a..b, oder: für a..b zu groſs; es iſt: a..a $=$ 1..1. Nimmt man das zweite NV., ſo nimmt man α zum gemeinſchaftlichen Maſse für a und b, und achtet die β für nichts, welche bei der Vergleichung von α mit a entſtehen. So viele a alſo in a und b ſind, ſo viele β werden für nichts geachtet; da nun dieſe β von a und b weggelaſſen werden, ſo iſt die Gröſse des hieraus entſtehenden zweiten NV. gegen das GV. daraus zu würdigen, wie ſich die weggenommenen Stücken verhalten. Verhielten ſich dieſe wie das GV. a..b ſelbſt, ſo wäre auch die 2te NV. dem GV. gleich. Allein da ſie ſich wie das erſte N. V. a..a verhalten (weil, ſo viele a in a und b ſind, ſo viele β weggelaſſen werden) dieſs aber gröſser als a..b (das GV.) iſt: ſo entſteht nach 17, 4. hieraus ein kleineres Verhältniſs, welches dem wahren a..b näher als das erſte iſt; dem zu Folge, was im erſten Beiſpiele betrachtet wurde; denn ſonſt hätte vom Hintergliede nichts dürfen weggenommen werden. Dieſs 2te NV. iſt $1\alpha..3\alpha = 1..3$. Nimmt man das dritte N. V., alſo β zum Maſse für a und b, ſo rechnet man die γ nicht mit, welche in a und b bleiben. Wie viele γ bleiben aber in a und b weg? gerade ſo viele, als β in beiden ſind; alſo aus a 1, und aus b 3. Sollte nun dieſs dritte NV. dem GV. gleich ſein, ſo müſste ſich das Weggelaſsne auf gleiche Weiſe verhalten (17, 2); da es ſich aber vielmehr gerade ſo verhält, wie das 2te Näherungsverhältniſs, wie 1..3, weil, ſo viele β da ſind, ſo viele γ in beiden weggelaſſen werden; und dieſs 2te NV. $<$ GV. iſt: ſo muſs das daraus entſpringende 3te Näherungsverh. nach 17, 3. gröſser ſein als das GV. Es iſt aber $= 2\beta..3\beta = 2..3$; ſowohl alſo das erſte Näherungsverhältniſs 1..1, als das dritte, iſt

gröſser

gröſser als das GV, oder: in Bezug auf das GV. zu groſs. Welches nun iſt dem GV a..b näher, 1..1 oder 2..3 (das erſte, oder das dritte)? Das von beiden, welches das kleinere iſt. Ich behaupte aber daſs 2..3 das kleinere iſt. Denn 1..1 entſtand aus a..b durch Hinwegnahme nach dem Verh. 0..1, 2..3 aber aus *demſelben* durch Hinwegnahme nach dem Verh. 1..2. Aber 0..1 $<$ 1..2 (oder vielmehr 0..1 kommt mit 1..2 gar nicht in Vergleichung, weil in erſterem das Vorderglied ſogar = 0 iſt) alſo iſt auch, nach 17, 5. weil 1..2 $>$ 0..1, das Verhältniſs, ſo aus der Hinwegnahme von 1..2 entſteht kleiner als das, ſo aus der Hinwegnahme von 0..1 entſteht, alſo weil beide gröſser ſind, die gröſsere Näherung. Alſo iſt das erſte NV. zu groſs, das zweite zu klein, das dritte wieder zu groſs; aber das zweite iſt näher als das erſte, und auch das dritte näher als das erſte. Da nun γ, β ausmiſst, indem $\beta = 2\gamma$, ſo giebt das 4te NV. das GV. ſelbſt. Alſo folgen dieſe 4 Verhältniſſe in folgender Ordnung:

$$1..1 > 2..3 > 5..8 > 1..2.$$

Und wenn man die beiden Extreme hinzuſetzt:

$$1..0 > 1..1 > 2..3 > 5..8 > 1..2 > 0..1.$$

Nun werden auch die allgemeinen Beweiſe darüber verſtändlich ſein, erſtens daſs die Näherungsverhältniſſe abwechſelnd gröſser und kleiner ſind als das Grundverhältniſs; zweitens daſs die folgenden NVerhältniſſe dem Grundverhältniſſe immer näher und näher kommen.

Ich führe alſo zuerſt den allgemeinen

Be-

Beweiſs, daſs die Näherungsverhältniſſe abwechſelnd gröſser und kleiner als das Grundverhältniſs ſind, in derſelben Ordnung, als ſie auf einander folgen.

Das Grundverhältniſs heiſse im allgem. a..b; ſo daſs $a < b$; ſo entſteht hieraus das erſte Näherungsverhältniſs dadurch, daſs man α, den erſten Reſt in b für nichts anſieht; a kann hiebei 1, 2, 3......n ganze male in b enthalten ſein. Daher iſt im allgemeinen das erſte NV. = a..na = 1..n (wo alſo n immer eine ganze Zahl iſt). Da nun das wahre Grundverhältniſs a..na + α iſt, α aber aus der Acht gelaſſen wird; ſo wird das Hinterglied kleiner als es ſein ſollte, wenn das Verhältniſs nicht ſollte geſtört werden (17); alſo wird das Vorderglied dagegen zu groſs, alſo auch deſſen Verhältniſs zu groſs (nehmlich in Bezug auf das geſuchte Grundverhältniſs). Alſo iſt das erſte NV. = a..na = 1..n > a..b.

Das zweite NV. entſteht, wenn man α zum Maſse für a und b nimmt, und dabei die entſtehenden 2ten Reſte, β, in a und b aus der Acht läſst. Es ſind aber in a und b ſo viele zweite Reſte β durch die Vergleichung von α und a, als a in a und b ſind. Aber in a iſt 1a und in b ſind n a. Es verhalten ſich alſo die weggelaſsnen Reſte in a und b wie 1a..na = 1..n, alſo gerade ſo, wie das erſte NV.; da nun dieſs erſte NV. zu groſs; ſo iſt auch das Verhältniſs der in a und b weggelaſsnen β, das ihm gleich iſt, zu groſs; alſo eben > a..b. Alſo iſt auch (17, 4) $a - 1\beta .. a - n\beta < a..b$; das iſt: das 2te NV. iſt < a..b; alſo dagegen zu klein. Ein allgemeiner Ausdruck für das 2te NV. iſt $w\alpha .. p\alpha$; wo w und p jede ganze Zahl bedeuten können.

Das

Das dritte NV. entsteht, wenn man β zum Masse für a und b nimmt, und dabei die bei der Vergleichung von β zu α entstehenden dritten Reste, γ, in a und b für Nichts achtet. Es entstehen also in a so viele Reste γ, bei der Vergleichung von β mit α, als α in a sind, und dabei in b so viele als α in b sind. Es sind aber in a (nach der Betrachtung des 2ten NVs) w ganze α, und in β p ganze α enthalten. Also werden bei dem 3ten NV. in a w und in b p ganze γ aus der Acht gelassen, oder von a..b herausgedacht. Diese herausgedachten $w\gamma..p\gamma$ verhalten sich nun $= w\alpha..p\alpha = w..p$. Diess Verhältniss aber, das zweite der Näherung, ist $<$ a..b; also ist (17, 3) $a - w\gamma..b - p\gamma > a..b$. Ein allgemeiner Ausdruck für das dritte NV. sei also $q\beta..r\beta$, wo auch q und r jede ganze Zahl nach Befinden der Umstände, bedeuten können.

Der vierte NV. entsteht, wenn man γ zum Masse für a und b nimmt, und die dabei entstehenden vierten Reste δ aus der Acht lässt. In a aber sind so viele δ, als β darin sind; so auch in b; also (nach dem letzten Absatze) sind in a $q\delta$ und in b $r\delta$. Es werden also auch hiebei aus a q und aus b r δ weggelassen; diess von beiden Weggelassne verhält sich also gerade wie das vorige NV, also wie q..r. Da nun q..r zu gross, so ist $a - q\delta..b - r\delta$ umgekehrt (17, 4) zu klein gegen das GV. a..b. Es sei für dieses 4te NV der allgem. Ausdruck: $s\gamma..t\gamma$.

So entsteht das 5te NV. aus dem a..b wenn man den nächsten 4ten Rest δ zum Masse für a und b nimmt, und die 5ten Reste ε für nichts achtet. Da aber die ε in a und b nach dem vorigen NV. vorhanden sind, diess aber zu klein gegen a..b ist, so muss dieses 5te NV. nach (17, 3) zu gross sein.

Und

Und da alſo im allgem. das folgende Näherungsverhältniſs aus dem GV. entſteht, wenn man den nächſten Reſt, nach dem vorigen NV. aus a und b wegnimmt, ſo muſs (nach 17, 3.4) allemal das folgende NV. zu groſs ſein wenn das vorige zu klein, und zu klein, wenn das vorige zu groſs iſt.

Da alſo das erſte allemal zu groſs, weil da nur aus dem Hintergliede b des GV. etwas, nehmlich der erſte Reſt α weggelaſſen wird; ſo iſt das 2te zu klein; das dritte zu groſs; das 4te zu klein; und ſ. f. ohne Ende, ſo weit die Näherungsverhältniſſe reichen. Jedes ungerade NV alſo (als das 1, 3, 5, 7te...) erſt zu groſs, jedes gerade NV. aber als das 2, 4, 6, 8te...) iſt zu klein, nehmlich gegen das Grundverhältniſs.

Dieſe Näherungsverhältniſſe können alſo allgem. ſo ausgedrückt werden

1, $a \,..\, na = 1 \,..\, n > a \,..\, b$
2, $w\alpha \,..\, p\alpha = w \,..\, p < a \,..\, b$
3, $q\beta \,..\, r\beta = q \,..\, r > a \,..\, b$
4, $s\gamma \,..\, t\gamma = s \,..\, t < a \,..\, b$
5, $u\delta \,..\, v\delta = u \,..\, v > a \,..\, b$
u. ſ. f. i. Unendliche.

Nunmehr wird auch verſtändlich ſein folgender

allgemeiner Beweiſs, daſs die folgenden Näherungsverhältniſſe immer dem Grundverhältniſſe näher kommen, als die vorigen, in derſelben Ordnung als ſie folgen.

(Zuvor müſſen die unter 17, 5 und 6 bewieſenen Sätze nochmals überdacht und angeſchaut werden).

Die

Die beiden von a..b am weitesten unter allen möglichen Näherungsverhältnissen entfernten Verhältnisse sind o..1 und 1..o. Denn man kann entweder den ganzen term. conf. b für nichts achten, so erhält man a..o = 1..o, welches Verhältniss grösser als alle ist, wo der term. conf. irgend einen Werth hat, denn in dem Verhältnisse 1..o ist der term. conf. gar nichts gegen den term. antec; in jedem andern ist er doch wenigstens etwas gegen den term. antec. Oder man kann den term. antec. a für nichts achten, also das Verhältniss o..b = o..1 nehmen, so ist diess Verhältniss kleiner als jedes angebliche, worin a gegen b doch irgend einen Werth hat. Also stehen alle Näherungsverhältnisse zwischen diesen beiden Extremen zwischen inne, das ist, alle die, so grösser sind als a..b (das GV.), sind doch kleiner als a..o = 1..o; und alle die, so kleiner sind als a..b, sind doch grösser als o..b = o..1.

Das erste Näherungsverhältniss ist zu gross, weil, nach dem extremen Verhältnisse o..1, von b allein weggenommen wird; o..1 aber ist das kleinste das es hier giebt, also ist umgekehrt (17. 5) das erste Näherungsverhältniss das grösste das es nach a..o = 1..o giebt. Da es aber doch kleiner als a..o = 1..o, so kommt es auch dem GV. näher als o..1, weil das Verh. 1..o nur mit dem o..1 gleich entfernt vom wahren Verhältnisse steht. Ein grösseres Näherungsverhältniss (nehmlich gegen andere Näherungsverhältnisse betrachtet; das heisst nicht: ein *näheres*) giebt es also nicht als das erste. Alle andere Näherungsverhältnisse, die es noch giebt, wenn sie gleich grösser sind als a..b, sind doch kleiner als das erste, welches wir allgemein bezeichnet haben a..na.

Das

Das zweite Näherungsv., $w\varkappa\,..\,p\varkappa$, ist zu klein, weil nach dem ersten $a\,..\,na = 1\,..\,n$ die Reste β weggelassen werden, $a\,..\,na$ aber zu groſs ist. Da aber $a\,..\,na = 1\,..\,n < a\,..\,o$ so ist $w\varkappa\,..\,p\varkappa$ doch (17, 5, 6) $> o\,..\,1$; welches auch von selbst klar ist, weil $w\varkappa$ zu $p\varkappa$ doch etwas ist, es sei nun p so groſs als es wolle. Also folgen diese 2 ersten Näherungsverhältnisse in ihren Extremen gegen ihr Grundverhältniſs, welches V heiſsen soll, in folgender Ordnung, wenn links die gröſseren rechts aber die kleineren Verhältnisse stehen als V.

$a\,..\,o,\ a\,..\,na,\ V,\ w\varkappa\,..\,p\varkappa,\ o\,..\,b.$

Das dritte NV., $q\beta\,..\,r\beta = q\,..\,r$, ist zu groſs, weil die Reste γ nach dem 2ten NV. nach $w\varkappa\,..\,p\varkappa$ $w\,..\,p$ weggenommen werden, welches Verhältniſs zu klein (gegen V) ist. Welches aber ist gröſser, das erste oder dritte? Ich behaupte das erste, denn dieses wird durch Hinwegnahme von a und b nach dem Verhältnisse $o\,..\,b = o\,..\,1$ gebildet, das dritte aber durch Hinwegnahme von $a\,..\,b$ nach dem 2ten Verhältnisse $w\varkappa\,..\,p\varkappa$; welches letzte $> o\,..\,b = o\,..\,1$. Also muſs auch das dritte NV. kleiner sein, als das erste (17, 5, 6). Denn um den Beweiſs zu wiederholen: wenn von demselben Verhältnisse $a\,..\,b$ erst nach dem Verhältnisse $o\,..\,b = o\,..\,1$ weggenommen wird, so wird dadurch a weit weniger verkleinert, als wenn von $a\,..\,b$ nach dem Verhältnisse $w\varkappa\,..\,p\varkappa$ weggenommen wird; daher muſs auch $a - o\,..\,b - 1 > a - w\varkappa\,..\,b - p\varkappa$. Die drei ersten NV. also stehen in ihren Extremen, gegen ihr Grundverhältniſs, V, nach ihrer Gröſse so geordnet:

$a\,..\,o,\ a\,..\,na,\ q\beta\,..\,r\beta,\ V,\ w\varkappa\,..\,p\varkappa,\ o\,..\,b.$

Das

Das vierte Näherungsverhältniſs iſt zu klein, weil es aus der Hinwegnahme der Reſte δ von a und b nach dem letzten Näherungsverhaltniſſe $q\beta \,..\, r\beta$ entſteht; welches letzte Verh. zu groſs iſt. Es heiſse dieſs 4te NV. $ſ\gamma \,..\, t\gamma$; ſo fragt ſich, da alſo $ſ\gamma \,..\, t\gamma < a \,..\, b$, und auch das 2te NV $w\varkappa \,..\, p\varkappa < a \,..\, b$ iſt; welches von beiden ob das zweite oder das vierte dem Grundverhältniſſe V das nächſte iſt? Das welches von beiden das gröſsere iſt; denn in dieſem iſt das Vorderglied gröſser als in dem zweiten, wiewohl noch kleiner als in V. Um dieſs auszumachen, darf man nur die Gröſse der beiden Verhältniſſe bedenken, nach welchen im 2ten und vierten Näherungsverhältniſſe die Wegnahme der Reſte geſchieht. Im 2ten NV., in $w\varkappa \,..\, p\varkappa$, geſchieht die Wegnahme nach dem erſten NV., $a \,..\, na$, im vierten NV. aber, in $ſ\gamma \,..\, t\gamma$, geſchieht die Wegnahme nach dem 3ten NV., nach $q\beta \,..\, r\beta$. Aber $a \,..\, na > q\beta \,..\, r\beta$, demnach iſt auch, nach 17, 5, $a - a \,..\, b - na = a - 1 \,..\, b - n = w\varkappa \,..\, p\varkappa < a - q\beta \,..\, b - r\beta = a - q \,..\, b - r = ſ\gamma \,..\, t\gamma$. Alſo iſt dieſs zweite NV. kleiner als das vierte, alſo das vierte gröſser als das zweite, alſo auch, weil beide kleiner als V, das vierte näher an V. als das zweite. Alſo ſtehen die 4 erſten NV., nach ihrer Gröſse alſo:

$$a \,..\, o,\ a \,..\, na,\ q\beta \,..\, r\beta,\ V,\ ſ\gamma \,..\, t\gamma,\ w\varkappa \,..\, p\varkappa,\ o \,..\, b.$$

Oder kürzer, wenn man unter den Zahlen die ſo vielten NVerhältniſſe verſteht:

$$o,\ 1,\ 3,\ V,\ 4,\ 2,\ o$$

Das 5te Näherungsverhältniſs iſt zu groſs, weil es aus der Hinwegnahme der Reſte ε aus a und b nach dem 4ten Näherungsv. entſteht, welches 4te

zu

zu klein war. Wiewohl es aber gegen V zu grofs ist, so ist es doch kleiner als das 3te NV., welches auch zu grofs gegen V. war. Denn das 5te entsteht durch die Hinwegnahme nach dem Verhältnisse des 4ten, aber das 3te entsteht durch die Hinwegnahme nach dem Verhältnisse des 2ten Näherungsv.; da nun das 4te NV. > als das zweite, beide aber kleiner als V, so ist auch nach 17, 6, das 5te NV. kleiner als das 3te. Und da das 3te und 5te beide gröfser als V sind, so ist dem zu Folge das 5te NV. dem Grundverh. näher als das 3te. Und es stehen also die 5 ersten Näherungsverh. nach ihrer Gröfse geordnet, also;

o, 1, 3, 5, V, 4, 2, o.
gröfsere kleinere.

Hieraus ergiebt sich nun allgemein:

Es sei das n-te Näherungsverhältnifs gegeben, so ist es entweder eines in gerader, oder eins in ungerader Anzahl der Näherungen;

a) Ist demnach das n-te NV. eins in gerader Zahl, so ist es kleiner als V.; und kommt V näher als das vorletzte Näherungsverhältnifs (als das n — 2te NV.), welches zwar auch kleiner als V, aber auch gröfser als das n-te NV ist. Denn es wird das n-te Näherungsverh. aus V. durch Hinwegnahme seiner Reste nach dem letzten (n — 1ten) NV., welches ein gröfseres als V. ist. Und das n — 2te NV. wird aus a..b gebildet durch Hinwegnahme nach dem n-3ten NV, welches auch ein gröfseres als V ist. Da nun aber das n — 1 NV. < als das n — 3te, so ist auch, nach 17, 5, das n-te NV. > als das n — 2te;

n — 2te; alſo weil beide letztere $<$ V. ſind, ſo iſt das n-te NV. zu V. näher als das n — 2te. w. z. e. w.

b) Iſt aber das n-te NV. eins in ungerader Anzahl, ſo iſt es gröſser als V; das vorletzte alſo vom n-ten an, das n — 2te iſt alſo auch gröſſer als V.; ich behaupte aber: das n-te iſt kleiner, als das n — 2te, und kommt ſonach V näher als das n — 2te. Denn das n-te entſpringt aus V. durch Hinwegnahme nach dem letzten, dem n — 1ten NVerhältniſſe, welches kleiner als V iſt; das n — 2te aber entſpringt durch Hinwegnahme nach dem n — 3ten NVerhältniſſe, welches auch kleiner als V iſt. Da nun aber das n — 1te gröſser als das n — 3te, ſo folgt, nach 17, 6, daſs das n-te NV. kleiner als das n — 2te ſei; da nun beide das n-te und n — 2te gröſser als V, ſo folgt weiter, daſs von ihnen das kleinere, alſo das n-te, das zu V. nähere ſei.

c) Beide Fälle berufen ſich wechſelſeits auf einander (*unter* a) beruft ſich auf *unter* b) und umgekehrt) es würde alſo nichts bewieſen ſein, wenn nicht für die 4 erſten Näherungsverhältniſſe bewieſen wäre, daſs das erſte gröſſer als V, und gröſser als das dritte welches auch gröſser als V; daſs ferner das 2te kleiner als V, aber gröſser als das vierte, welches auch gröſser als V; daſs alſo die Ordnung der erſten 4 NV. ſei:

o, 1, 3, V, 4, 2, o,
gröſsere kleinere.

Da

Da aber diefs vorhin fo eben bewiefen worden, fo findet für das 5te und 6te Glied die unter a) und b) gemachte Vorausfetzung wechfelfeits wirklich ftatt; alfo anch für das 7te und 8te,.... u. f. f. wechfelfeits ins Unendliche.

Wenn alfo zum B. 9. Näherungsverhältniffe fich zeigen, wovon das 9te das Grundverhältnifs V felbft ift, fo folgen die Näherungsverhältniffe in Rückficht ihrer Gröfse und Näherung alfo:

0, 1, 3, 5, 7, 9, 8, 6, 4, 2, 0
gröfsere V *kleinere*

Z. B. Fig. 27. ift das Grundverhältnifs 11..29. Und die Näherungsverhältniffe

1, 1.. 2, die Wegnahme nach 0..1;
2, 1.. 3, die Wegnahme nach 1..2;
3, 2.. 5, die Wegnahme nach 1..3;
4, 3.. 8, die Wegnahme nach 2..5;
5, 11..29, die Wegnahme nach 3..8.

Alfo ift

$1..2 > 2..5 > 11..29 > 3..8 > 1..3.$

Nach der oben erklärten Art der Bezeichnung können die Näherungen des Beifpiels durch folgende Stufen bedeutet werden:

$\frac{1}{2}\ \mathrm{I}\ \frac{1}{1}\ \mathrm{I}\ \frac{1}{1}\ \mathrm{I}\ \frac{1}{1}\ \mathrm{I}\ \frac{1}{3}$; oder nach der gewöhnlichen Bezeichnung:

allge-

allgemein *Beispiel*

$$\cfrac{a}{b = na + \cfrac{\alpha}{a = n\alpha + \cfrac{\beta}{\alpha = n\beta + \cfrac{\gamma}{\beta = n\gamma + \cfrac{\delta}{\gamma = n\delta}}}}}$$

$$\cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3}}}}}$$

Wer ſich das Vorige anſchaulich gemacht hat, wird auch dieſe Ausdrückung anſchaulich finden. In

$\frac{1}{2}$ I $\frac{1}{1}$ I $\frac{1}{1}$ I $\frac{1}{1}$ I $\frac{1}{3}$

iſt in dem erſten Verhältniſſe, $\frac{1}{2}$, das Verhältniſs von a..b ausgedrückt in den Zahlen des Vorderglieds, welches hiebei als Einheit geſetzt wird, nur nicht vollſtändig, weil a aus der Acht gelaſſen worden iſt, daher muſs erſt noch das Verhältniſs von α zu a geſucht werden, oder von $\frac{\alpha}{a}$; dieſs iſt wieder durch $\frac{1}{1}$ ausgedrückt, und α wird hiebei als 1 geſetzt, da nun α in a einmal gelegen, ſo ſteht unter dem Striche 1; aber da dieſs Verhältniſs wieder nicht genau iſt, ſo muſs man weiter das Verhältniſs des neuen Reſtes β zum vorigen α ſuchen, dieſs dritte Verhältniſs, iſt durch die dritte Stufe angedeutet, $\frac{1}{1}$ indem $\beta = 1$ geſetzt, und α demnach ausgedrückt wird; allein es bleibt auch hier ein neuer Reſt γ demnach muſs ferner das Verh. $\frac{\gamma}{\beta}$ geſucht werden, welches durch die 4te Stufe $\frac{1}{1}$ angedeutet iſt, indem hier γ als 1 angeſehen und β demnach ausgedrückt wird; es bleibt aber auch hier ein neuer Reſt, δ, deſſen Verhältniſs

niſs zum vorigen Reſte γ, $\frac{\delta}{\gamma}$, geſucht werden muſs; es wird alſo in der 5ten Stufe $\delta = 1$ geſetzt, und da γ gerade $= 3\delta$ iſt, ſo iſt dieſs Verhältniſs ganz genau richtig, alſo ſind auch alle vorige gefunden, vermittelſt δ, welches nun γ, β, α, a, b miſst.

Wer dieſs verſtanden, wird auch jeden ſolchen Stufenausdruck der Form

$$\frac{1}{n}\ \mathrm{I}\ \frac{1}{p}\ \mathrm{I}\ \frac{1}{q}\ \mathrm{I}\ \frac{1}{r}\ \mathrm{I}\ \frac{1}{s}\ \mathrm{I}\ \ldots\ldots$$

(wo n, p, q, r, ſ ... ganze Zahlen bedeuten) auflöſen, und ſowohl alle Näherungen als auch das wahre Verhältniſs daraus finden können.

Dieſs ſoll in der Folge noch weiter gezeigt werden, wenn andere erleichternde Betrachtungen werden vorausgeſchickt ſein. Ich bemerke nur noch, daſs man für:

$$\frac{1}{n}\ \mathrm{I}\ \frac{1}{p}\ \mathrm{I}\ \frac{1}{q}\ \mathrm{I}\ \frac{1}{r}\ \mathrm{I}\ \frac{1}{s}\ \ldots$$

auch ſchreiben kann:

$$1..n\ \mathrm{I}\ 1..p\ \mathrm{I}\ 1..q\ \mathrm{I}\ 1..r\ \mathrm{I}\ 1..s\ldots$$

weil wir dieſe beiden Bezeichnungsarten (3) für das Verhältniſs gewählt haben.

Wir wollen nun endlich

die Anwendung dieſes Lehrſatzes auf die idealiſchen Verhältniſſe

betrachten, ſo weit dieſs, ohne die Natur dieſer Verhältniſſe genauer zu kennen, möglich iſt.

In einem jeden idealischen (unendlichen, incommensurabeln) Verhältnisse läſst ſich kein gemeinschaftliches Maſs für die beiden Glieder a.?.b deſſelben finden (7); demnach kann man auch nicht hoffen, dieſs durch die Kleinheit irgend eines Maſses zu zwingen; denn da einmal als das Weſen dieſes Verhältniſſes geſetzt wird, daſs es gar kein ganz genaues Maſs für a und b gebe, ſo iſt gar nicht darnach die Frage, wie wenig oder wie viel man mit irgend einem Maſse, das man dennoch annimmt, fehle.

Es ſei alſo im allgemeinen a.?.b, ſo folgt daſs a.?.b ein Verhältniſs der Ungleichheit ſei, entweder alſo a > b oder b > a; denn das identiſche Verhältniſs wird durch ſeine beiden Glieder gemeſſen. Setze alſo a ſei < b; ſo kann man doch a mit b vergleichen, und a aus b ſo viele ganze male nehmen als man will, und weil b endlich, ſo muſs man am Ende ein Stück erreichen welches < a iſt. Dieſs heiſse der erſte Reſt α. Wenn man nun das Verhältniſs von α..a kennete, ſo kennete man auch das Verhältniſs von a..b; aber α.?.a, denn wenn α a mäſse ſo mäſse α auch b, weil b = na + α iſt. Daher iſt nun zwar α mit a zu vergleichen, allein es wird wieder ein Reſt β bleiben, < α; wenn man alſo β..α kennete, ſo kennete man auch α..a und a..b; aber auch β.?.α, denn wenn β α mäſse, ſo mäſse es auch a und b, alſo wäre a.,.b, wider die Vorausſetzung. Wenn man alſo β mit α vergleicht, ſo erhält man wider einen Reſt γ, der wieder incommenſurabel gegen β iſt, und ſo immer einen neuen Reſt der gegen ſeinen und alle vorigen incommenſurabel iſt, ohne Ende; denn wenn ein folgender Reſt den vorigen mäſse, ſo mäſse er auch *alle* vorige, alſo auch a und b; alſo wäre a.,.b, wider die Vorausſetzung. Man kann alſo die oben gezeigte Vergleichung beim unend-

lichen

lichen Verh. ohne Ende fortſetzen, ohne je ſo ein Verhältniſs zu ergründen. Da man aber wie gezeigt durch dieſe Vergleichung immer nähere Verhältniſſe bekommt, die immer abwechſelnd gröſser und kleiner ſind, ſo folgt: daſs jedes unendliiche Verhältniſs einer unendlichen Reihe ſolcher Stufen gleich ſei, und immer genauer und genauer, niemals jedoch ganz genau erkannt werden könne. Das erſte gefundene endliche Verh. iſt zu groſs, das andere zu klein, das dritte zu groſs, aber weniger zu groſs.... u. ſ. f. ins Unendliche. Alſo iſt

$$a.?.b = \frac{a}{na} \; \mathrm{I} \; \frac{\alpha}{n\alpha} \; \mathrm{I} \; \frac{\beta}{n\beta} \; \mathrm{I} \; \frac{\gamma}{n\gamma} \; \mathrm{I} \; \frac{\delta}{n\delta} \; \mathrm{I} \ldots\ldots$$

oder:

$$a.?.b = \frac{1}{n} \; \mathrm{I} \; \frac{1}{p} \; \mathrm{I} \; \frac{1}{q} \; \mathrm{I} \; \frac{1}{r} \; \mathrm{I} \; \frac{1}{ſ} \; \mathrm{I} \ldots\ldots\ldots$$

$$a.?.b = 1.,.n \; \mathrm{I} \; 1.,.p \; \mathrm{I} \; 1.,.q \; \mathrm{I} \; 1.,.r \; \mathrm{I} \ldots\ldots$$

Alſo *jedes unendliche* Verhältniſs läſst ſich durch eine ſolche Stufenfolge *endlicher* Verhältniſſe, in der gezeigten Verkettung, ausdrücken.

Und es ſtehen alſo alle incommenſurable Gröſsen *aller* Art (wenn es hierin Arten giebt, was erſt in der Folge muſs ausgemacht werden) unter dieſer Form; und ſollten ſich ja andere Ausdrückungen und Darſtellungsarten unendlicher Verhältniſſe geben laſſen, ſo müſſen ſich dieſelben doch, insgeſammt, auf dieſen ihren urſprünglichſten Ausdruck bringen laſſen.

Wenn alſo gleich ein unendliches Verh. in Zahlen nie kann ermeſſen werden, indem das Endliche das

Unendliche in seiner göttlichen Vollendung unmöglich in sich begreift: so läſst sich doch, durch Hinzunehmen immer mehrerer Stufen ein Zahlenausdruck finden, welcher ihm immer näher steht; wiewohl dieses *näher* nicht in der Unendlichkeit des unendlichen Verhältnisses selbst, sondern nur in Vergleich mit den vorigen Näherungen ausgedrückt und erkannt werden kann.

Und obwohl bei den ferneren Näherungen die endliche Zahl sich immer vergröſsert und nach ihrem Unendlichen sich erstreckt, so vermöchte sie doch die ewige Bestimmtheit eines unendlichen Verhältnisses, selbst mit ihren unermeſslichsten Gröſsen (Zahlen) nicht zu ergründen. Es sind also auch diese unendlichen Verhältnisse in der Vernunft zu fassen, nicht aber durch Verstand und Phantasie zu erkennen. Daher auch, daſs solche Unendlichkeit in der Endlichkeit (in endlichgroſsen Gliedern des unendlichen Verhältnisses) begründet sei, *im allgemeinen* nur durch die vernünftigste, das ist die philosophische, Betrachtung erkannt und bewiesen werden kann, und dieſs also für die mathematische Erkenntniſs der gemeinen Art zu erreichen von jeher unmöglich gewesen ist, und ewig unmöglich sein wird.

Aus diesen Betrachtungen wird auch die Eintheilung der Verhältnisse der Art und der Gröſse nach (4) anschaulicher sein, wobei ich die Terminologie der älteren Mathematiker kurz erläutere:

Der Art nach (qualitate) abgetheilt, sind die Verhältnisse entweder endliche, commensurable, rationale, nennbare, in Zahlen ausdrückbare, oder unendliche, incommensurable, irrationale, idealische, unnennbare. Die letzteren

teren aber ſind uns, ſo weit wir jetzt vorgedrungen ſind, noch problematiſch, daher auch die weitere Eintheilung derſelben hier noch nicht geleiſtet werden kann.

Der Gröſse nach abgetheilt (quantitate) ſind endliche ſowohl als unendliche Verhältniſſe, entweder der Gleichheit, oder der Ungleichheit, und im letzteren Falle der gröſseren, wenn das Vorderglied > als das Hinterglied, der kleineren aber, wenn das Vorderglied kleiner als das Hinterglied (4). Die Gröſse alſo des Verhältniſſes wird danach beſtimmt, ein wie Beträchtliches oder Unbeträchtliches das Vorderglied vom Hintergliede iſt.

I) In einem endlichen Verhältniſſe der gröſseren Ungleichheit (in ratione commenſurabili majoris inaequalitatis) iſt das Vorderglied, a, in Bezug auf ſein Hinterglied b

1) ein ganzes Vielfaches des kleineren Gliedes, b; oder von b aus angeſehen: b iſt der beſtimmtvielte Theil von a nur ein einzigesmal (b iſt pars aliquota τȣ a): ſo heiſst ſo ein Verhältniſs ein vielfaches, ratio multiplex; man ſollte lieber ſagen: ein Verhältniſs eines Vielfachen zum Einfachen. Ein allgemeiner Ausdruck dafür iſt alſo: a..b = nb..b; wenn n jede ganze Zahl bedeutet. Dieſe Verhältniſſe folgen der Gröſse nach ſo auf einander:

2..1, ratio dupla (nicht duplicata, welches etwas anderes bedeutet), das Verhältniſs des Doppelten.
3..1, ratio tripla, V. des Dreifachen.
4..1, ratio quadrupla, des Vierfachen.
u. ſ. w. ohne Ende.

Das Verhältniſs der Gleichheit, heiſst im Gegenſatz der Verhältniſſe der Vielfachen ratio ſimpla (nicht ſimplex).

2) das

2) das einfache b, und ein beſtimmtvielter Theil von b nur einmal; oder von b angeſehen: b iſt der beſtimmtvielte Theil von a ſo vielemale, daſs nur ein ſolcher Theil zur Einheit a fehlt (b iſt ein auf dieſe Art beſtimmter aliquanter Theil von a). Dieſe Verhältniſſe heiſsen rationes ſuperparticulares, ihr allgemeiner Ausdruck $\frac{bn+1}{n}$. . b. Sie folgen in Gröſse ſo aufeinander:

3..2, ratio ſeſquialtera ſ. ſeſcupla.
4..3, ratio ſeſquitertia.
5..4, ratio ſeſquiquarta.
6..5, ratio ſeſquiquinta.
u. ſ. f. ohne Ende.

3) das einfache b einmal, und noch ein beſtimmtvielter Theil von b, mehr als einmal aber wenigeremale als zu einer ganzen Einheit b erforderlich iſt. Solche Verhältniſſe heiſsen rationes ſuperpartientes (und b iſt dabei ebenfalls ein aliquanter Theil von a. Ihr allgemeiner Ausdruck iſt: $(\frac{b}{n} . 2n) - (n - p\frac{b}{n})$. . b. Sie folgen in Gröſse alſo:

5..3, ratio ſuperbipartiens tertias (ſc. partes). (*bipartiens*, weil 2 dritte Theile über den term. conſ. in term. antecedens ſind, *tertias* partes, weil es dritte Theile des Hinterglieds ſind.)
(6..4 = 3..2, ratio ſeſquialtera).
7..4, ratio ſupertripartiens quartas.
7..5, ratio ſuperbipartiens quintas.
8..5, ratio ſupertripartiens quintas.
9..5, ratio ſuperquadripartiens quintas.
u. ſ. f. ins Unendliche.

4) Das

4) Das Vorderglied ist ein ganzes Vielfaches von seinem Hintergliede, und enthält dabei vom Hintergliede noch ein Stück, welches kleiner ist, als das Hinterglied. Diess überschüssige Stück ist

a) ein aliquoter Theil vom Hintergliede, das ist, ein bestimmtvielter Theil desselben nur *einmal;* diese Verhältnisse heissen rationes multiplices superparticulares. Sie folgen in der Ordnung also:

5..2, ratio dupla sesquialtera.
7..3, ratio dupla sesquitertia.
9..4, ratio dupla sesquiquarta.
u. s. f. ins Unendliche.
7..2, ratio tripla sesquialtera.
10..3, ratio tripla sesquitertia.
13..4, ratio tripla sesquiquarta.
u. s. f. ins Unendliche.
Und so fort ins Unendliche.

b) ein aliquanter Theil vom Hintergliede, das ist ein bestimmtvielter Theil desselben mehreremale, doch wenigeremale als zu einem ganzen Hintergliede gehört; diese Verhältnisse heissen rationes multiplices superpartientes. Sie sind nach einander;

8..3, ratio dupla superbipartiens tertias.
11..4, ratio dupla supertripartiens quartas.
12..5, ratio dupla superbipartiens quintas.
13..5, ratio dupla supertripartiens quintas.
14..5, ratio dupla superquadripartiens quintas.
u. s. f. ins U.
11..3, ratio tripla superbip. tertias.
15..4, ratio tripla supertrip. quartas.
17..5, ratio tripla superbip. quintas.
u. s. f. ins U.
Und so fort ins Unendliche.

II) Was

II) Was aber die Verhältnisse der kleineren Ungleichheit betrifft, so sind bei ihnen die gleichen Abtheilungen, und gleichen Benennungen, nur daſs überall *sub* davor gesetzt wird. Also

1) rationes submultiplices; z. B.

1..2 ratio subdupla.

1..3 ratio subtripla.

2) rationes subsuperparticulares; z. B.

2..3, ratio subsesquialtera.

5..6, ratio subsesquiquinta.

3) rationes subsuperpartientes; z. B.

3..5, ratio subsuperbipartiens tertias.

5..9, ratio subsuperquadripartiens quintas.

4) rationes submultiplices subsuperparticulares.

Z. B. 2..5 ratio subdupla subsesquialtera.

5) rationes submultiplices subsuperpartientes,

Z. B. 3..11, ratio subtripla subsuperbipartiens tertias.

18.

Jedes Verhältniſs ist dadurch vollkommen bestimmt, wie das Vorderglied aus dem Hintergliede, oder umgekehrt das Hinterglied aus dem Vordergliede entsteht; und zwar jedes endliche Verhältniſs dadurch: was das Vorderglied für eine Zahl vom Hintergliede, oder das Hinterglied vom Vordergliede ist; denn beide sind Zahlen von einander (9), dadurch daſs sie durch das gemeinsame gröſste Maſs beide gemessen werden. Ist a selbst das gröſste gemeinsame Maſs, so ist b eine ganze Zahl von a, aber a eine gebrochne Zahl von b. Ist b selbst das gröſste gemeinsame Maſs, so ist a eine ganze Zahl von b, aber b eine gebrochne Zahl von a. Ist aber weder a noch b das gröſste gemeinsame Maſs, so sind beide von einander gebrochne Zahlen (9).

Hier-

Hierdurch zeigt ſich die urſprünglichſte Anſchauung und Bezeichnung der Beſtimmtheit eines jeden endlichen Verhältniſſes: man betrachte und drücke aus entweder das Vorderglied als Zahl des Hintergliedes, oder das Hinterglied als Zahl des Vordergliedes. Wird das Vorderglied als Zahl des Hintergliedes betrachtet, ſo iſt ſein Ausdruck $\frac{a}{b}$, weil hier b, als Einheit, eingetheilt nach dem gemeinſamen Maſse (nach 9) unter den Strich, als Hinterglied; und a als Zahl von b eingetheilt nach demſelben gemeinſamen Maſse, als Vorderglied, über den Strich zu ſetzen iſt; alſo iſt allgemein in a..b $a = \frac{a}{b}$ von b. Wird aber das Hinterglied als Zahl des Vordergliedes angeſehen, ſo iſt ſein Ausdruck $\frac{b}{a}$, weil hier a, als Einheit, eingetheilt, nach dem gemeinſamen Maſse (nach 9.) unter den Strich, als Hinterglied; und b als Zahl von a, eingetheilt nach demſelben gemeinſamen Maſse, als Vorderglied, über den Strich gehört; es iſt dann allgemein in a..b, $b = \frac{b}{a}$ von a. Beide Anſichten und Bezeichnungsarten ſind an ſich gleich in der Natur der Sache gegründet, die erſtere aber wird darum, für den Zweck der künftigen Betrachtungen vorgezogen, weil es natürlicher iſt, das Vorderglied als Zahl des Hinterglieds zu betrachten, als umgekehrt; denn indem man ſagt: „a..b," ſo iſt ja eben dadurch, und ſo lange man die Sache alſo anſieht b als Einheit und a, als deſſen Zahl erklärt. Daher werde ich auch die Beſtimmtheit jedes endlichen Verhältniſſes ſo characteriſiren, daſs ich das Vorderglied als Zahl des Hinterglieds angebe; alſo im allgemeinen ſei der Ausdruck des Verhältniſſes a..b, $\frac{a}{b}$ (nicht $\frac{b}{a}$), das iſt: a iſt von $b = \frac{a}{b}$. Der *Ausdruck* des Verhältniſſes heiſse auch *Name* oder *Exponent*

(nomen

(nomen s. exponens rationis) desselben; und wir verstehen also unter dem *Namen* des Verhältnisses hinfort immer den einen von den 2 möglichen, indem das Vorderglied als Zahl des Hintergliedes angegeben wird. Der Name also jedes Verhältnisses ist mit dem Zeichen des Bruches, welcher a von b ist, einerlei (9), und hieraus ist klar, dass der Name jedesmal aus zweien ganzen Zahlen bestehen müsse, einer welche b nach dem gemeinsamen Masse eintheilt, die daher der *Nenner* (denominator) und der anderen, welche nach demselben gemeinsamen Masse a selbst zu Stande bringt, die daher der Zähler (numerator) genannt werden kann. Also in a..b ist der Name oder Exponent $\frac{a}{b}$, und b der Nenner, a aber der Zähler des Exponenten.

(Vor dem Ueberdenken dieses § müssen 9, 10, 11, nochmals überdacht werden.)

Z. B. Fig. 25. im Verhältnisse 3..5 ist 3 von 5 $= \frac{3}{5}$, also auch $\frac{3}{5}$ der Name oder Exponent dieses Verhältnisses, 5 ist dessen Nenner, 3 dessen Zähler; 5 und 3 beziehen sich auf die, a und b gemeinsame Einheit β, deren ganze Zahlen a und b sind. Drückte man aber diess Verhältniss nach b aus, und sähe b als Zahl von a an, so wäre der Ausdruck des Verhältnisses umgekehrt $\frac{5}{3}$.

Das Vorderglied entsteht aus dem Hintergliede durch Multiplication, das Hinterglied aus dem Vordergliede aber durch Division mit dem Namen des Verhältnisses. Also in a..b ist $a = b.\frac{a}{b}$ und $b = a : \frac{a}{b}$. Oder wenn $\frac{n}{m}$ jeden Exponenten bedeutet, ist $a = b.\frac{n}{m}$, aber $b = a : \frac{n}{m}$.

Denn

Denn der Exponent giebt an, welche Zahl a von b ist; wenn man also von b aus diese Zahl construirt, das ist b mit dieser Zahl, nehmlich dem Exponenten, multiplicirt (11), so erhält man a. Also ist $a = b . \frac{a}{b}$; oder wenn $\frac{n}{m}$ jeden Exponenten bedeutet, $a = b . \frac{n}{m}$.

Da ferner mit einer Zahl $\frac{n}{m}$ multipliciren, und mit ihrer umgekehrten $\frac{m}{n}$ dividiren, für das Resultat, ganz gleich ist (17, a*), $\frac{m}{n}$ aber der umgekehrte Exponent ist, so erhält man auch a, wenn man b mit dem umgekehrten Exponenten dividirt. Also ist

$$a = b . \frac{n}{m} = b : \frac{m}{n}.$$

Da ferner der Exponent angiebt welche Zahl a von b ist, so muss man b erhalten, wenn man a als diese Zahl (den Exponenten) ansieht, das ist durch den Exponenten dividirt (11). Also ist $b = a : \frac{a}{b}$ oder $b = a : \frac{n}{m}$.

Da nun mit einer Zahl dividiren, so viel ist als mit ihrer entgegengesetzten multipliciren (17, a), $\frac{m}{n}$ aber die entgegengesetzte oder umgekehrte $\frac{n}{m}$, also auch der umgekehrte Exponent ist, so ist auch

$$b = a . \frac{b}{a} \text{ oder } b = a . \frac{m}{n}.$$

Es

*) Die Paragraphenzahl 13 sowohl als die 17 ist aus Verfehen doppelt stehen geblieben, unter 13a also verstehe den ersteren § unter 13, unter 13b aber den andern; so auch mit den beiden §§ unter 17.

$$\text{Es ist also } a = b \cdot \frac{n}{m} \text{ oder } b : \frac{m}{n}, \text{ und}$$

$$b = a : \frac{n}{m} \text{ oder } a \cdot \frac{m}{n}.$$

Zum Beispiel

Fig. 26. $a..b = 5..8$. entsteht a aus b entweder durch Multiplication mit dem Exponenten $\frac{5}{8}$, oder durch Division mit dem umgekehrten Exponenten, $\frac{8}{5}$.

Durch Multiplication mit $\frac{5}{8}$; denn wenn b durch $\frac{5}{8}$ multiplicirt wird, so muss man b in 8 Theile theilen, und den 8ten Theil von b 5mal nehmen (11).

Durch Division mit dem umgekehrten Exponenten, also mit $\frac{8}{5}$; denn wird b als $\frac{8}{5}$ angesehen und die Einheit gesucht, wovon b $\frac{8}{5}$, das ist der 5te Theil 8mal ist, so muss man wieder b in 8 Theile theilen, und um den Quotienten a zu finden, diesen 8ten Theil 5mal nehmen.

In diesem Beispiele entsteht von der andern Seite b aus a entweder durch die Division mit dem Exponenten $\frac{5}{8}$, oder durch Multiplication mit dem umgekehrten Exponenten $\frac{8}{5}$.

Durch Division mit dem Exponenten; denn wenn man a als $\frac{5}{8}$ ansieht, wie es wirklich von b $\frac{5}{8}$ ist, so muss man b erhalten; und man findet b, wenn man a in 5 Theile theilt, und deren auf b, 8 nimmt.

Durch Multiplication mit dem umgekehrten Exponenten; denn da a von b $\frac{5}{8}$ ist, so ist umgekehrt b von a, $\frac{8}{5}$; da nun von a b $\frac{8}{5}$ ist, so muss man auch b erhalten, wenn man von a aus die Zahl $\frac{8}{5}$ construirt, das ist (11) a durch $\frac{8}{5}$ multiplicirt. Man theilt also a in 5 Theile, und nimmt deren 8 auf b.

Alſo wird auch a aus b gebildet, wenn man b durch den Nenner, m, des Exponenten, $\frac{n}{m}$, dividirt, und den Quotient mit dem Zähler, n, des Exponenten $\frac{n}{m}$ multiplicirt.

Denn $a = b \cdot \frac{n}{m}$; alſo muſs b als das m-fache das gemeinſamen Maſses angeſehen, alſo durch m dividirt werden; der Quotient iſt das gemeinſame Maſs; von dieſem aber, um a zu geben, muſs die Zahl n genommen, alſo muſs es mit n multiplicirt werden.

Z. B. Fig. 24. a..b = 2..3; der Exponent iſt $\frac{2}{3}$. Alſo iſt $a = b \cdot \frac{2}{3}$. Demnach, um aus b, a zu bilden, muſs *erſtlich* b in 3 Theile getheilt, alſo als das Dreifache angeſehen, d. i. (11) durch 3 dividirt werden (3 aber iſt der *Nenner* oder Theiler des Exponenten). Der Quotient iſt α in der Figur, d. i., das gemeinſame Maſs zu a und b. Aus α aber wird *zweitens* a gebildet dadurch, daſs man α 2mal nimmt, alſo davon die Zahl 2 conſtruirt, alſo mit 2 multiplicirt (11) (2 aber iſt der *Zähler* des Exponenten).

Und umgekehrt wird daher b aus a gebildet, wenn man a mit dem Zähler, n, des Exponenten $\frac{n}{m}$, dividirt und den Quotienten mit dem Nenner, m, des Exponenten, $\frac{n}{m}$, multiplicirt.

Denn a iſt $= b \cdot \frac{n}{m}$, alſo muſs a als das n-fache des gemeinſamen Maſses angeſehen, alſo durch n, dividiret werden,

werden. Der Quotient ist das gemeinsame Mass. Diess liegt in b m-mal; construirt man also vom gem. Masse aus die Zahl m, so erhält man b; eine Zahl aber von einer Grösse aus construiren, heisst letztere mit ersterer multipliciren (11).

Z. B. Fig. 24. a..b = 2..3; ist a = b.$\frac{2}{3}$. Man sehe also a als das 2fache an, das ist, dividire a durch 2, den Zähler des Exponenten; so erhält man das gemeins. Mass α, in der Figur. Diess liegt 3mal in b; bilde also von α die Zahl 3, d. i. multiplicire α mit 3, dem Nenner des Exponenten: so kommt b.

Bei unendlichen Verhältnissen (17, b) ist der Exponent keine Zahl, wiewohl man immer einen näheren und näheren (17, b) finden kann.

Vesteht man unter Vielheit jede bestimmte Beschaffenheit einer Grösse gegen eine andere, als solche, so ist auch im unendlichen Verhältnisse a von b und umgekehrt eine bestimmte Vielheit; und zwar ist a von b die umgekehrte Vielheit (16) als b von a ist.

Heisst man: eine bestimmte Vielheit von einer Grösse zu Stande bringen, diese Grösse durch diese Vielheit multipliciren; und umgekehrt, nennt man eine bestimmte Grösse als eine bestimmte Vielheit ansehen und dazu die Einheit suchen: diese Grösse durch diese Vielheit dividiren; so passen die so eben in diesem § vom endlichen Verhältnisse bewiesenen Behauptungen auch vom unendlichen. Die Darstellung dieser bestimmten Vielheit der Glieder des unendlichen Verhältnisses gegen einander kann nie in Zahlen geschehen, also überhaupt nicht durch Phantasie erreicht werden;

sie

ſie wäre der Exponent des unendlichen Verhältniſſes, welcher ganz genau wäre; wenn nun aber dieſe unendlichbeſtimmte Vielheit (der Exponent jedes unendlichen Verhältniſſes) durch ȣ bezeichnet wird: ſo deutet ȣ an, welches Vielfache a zu b, in a . ? . b iſt. Alſo iſt in a . ? . b

a = b . ȣ, und:
b = a : ȣ

Und wenn ferner ꝏ das entgegengeſetzte Vielfache von ȣ bedeutet, ſo iſt:

a = b . ȣ = b : ꝏ; und:
b = a : ȣ = a . ꝏ

Daſs aber der Begriff der Multiplication und Diviſion ſo beſtimmt werden müſſe, iſt eben daraus klar, daſs es unendliche Verhältniſſe giebt; alſo Vielfache, die ſich von jeder Gröſse aus conſtruiren, oder auch, als die ſich jede Gröſse anſehen läſst, wenn dieſe Vielfachen gleich in Zahlen nicht können ausgedrückt werden. Hieraus alſo folgt der allgemeine ganz umfaſſende Begriff der Multiplication und Diviſion, den wir ſchon §. 12. zu Ende vermuthen muſsten, welcher demnach im nächſten §. ausgedrückt iſt.

19.

Von einer Gröſse, a, eine beſtimmte Vielheit, v, zu Stande bringen oder conſtruiren, heiſst a mit dieſer Vielheit, v, multipliciren; a heiſst Multiplicand, v Multiplicator, die conſtruirte Vielheit, p, Product (11).

Die

Die von a aus zu conſtruirende Vielheit iſt entweder eine endliche, alſo v eine Zahl, und ihr allgemeiner Ausdruck $\frac{n}{m}$ (10, 11.); dann iſt das Product, p, auch eine Zahl von a, alſo a zu dieſem Producte in endlichem Verhältniſſe; a.,.p.

Oder die aus a zu conſtruirende Vielheit iſt eine unendliche (idealiſche, in Zahlen unnennbare), alſo v keine Zahl, und ihr allgemeines Zeichen ∞; ſo iſt auch das Product von a keine Zahl, alſo a.?.p; eben weil p von a eine unnennbare Vielheit ſein ſoll. Da man aber für ∞ (17, b) immer eine nähere Zahl, ein näheres $\frac{n}{m}$ finden kann, ſo kann man auch für a.?.p ein immer näheres a.,.p finden; welches letztere jedoch vom wahren a.?.p in ſofern immer gleich weit entfernt bleibt, als man von da aus eben ſo wenig a.?.p je erreichen kann, als von einem weniger genauen a.,.p aus.

Eine Gröſse, a, als eine beſtimmte Vielheit, v, anſehen, und dazu die Einheit, q, ſuchen, heiſst a mit v dividiren; a heiſst Dividend, v Diviſor, und q Quotient (11).

Die Vielheit, als die a angeſehen, das iſt, wodurch a dividirt wird, iſt entweder eine endliche, alſo eine Zahl, und ihr allgemeiner Ausdruck $\frac{n}{m}$ (10, 11); dann iſt auch die zu a danach gefundene Einheit gegen a eine Zahl, das iſt, in endlichem Verhältniſſe, d. i. a.,.q (9).

Oder die Vielheit, womit a dividirt wird, iſt eine unendliche (idealiſche, in Zahlen unnennbare), und ihr

ihr allgemeiner Ausdruck ȣ; ſo iſt auch a.?.q; denn es ſoll ja eben a gegen q ȣ, das iſt unnennbar in Zahlen ſein. Da ſich nun für ȣ ein immer näheres $\frac{n}{m}$ finden läſst, ſo läſst ſich auch für a.?.q ein immer näheres a.,.q finden.

Da jede Vielheit nicht für ſich (§. 7.), ſondern nur in Bezug auf ihre Einheit, dieſe beſtimmte Vielheit iſt, ſo muſs auch bei jeder Multiplication und Diviſion, zu dem Multiplicator oder Diviſor eine abſolute Einheit verſtanden werden, in Bezug auf welche dieſe Vielheit gerade dieſe Vielheit iſt; da aber hiebei blos die Vielheit als ſolche betrachtet wird, oder blos das Verhältniſs von der Vielheit zu ihrer Einheit, ſo bleibt dieſe abſolute Einheit unbeſtimmt, und es ſoll eben nach Maſsgabe dieſer allgemeinen Anſchauung (dieſes allgemeinen beſtimmten Verhältniſſes) von α aus (das iſt vom Multiplicandus oder Dividendus aus) entweder die allgemeine Vielheit (in der Multiplication) oder die allgemeine Einheit (in der Diviſion) nach a einen individuellen Werth erhalten. Heiſst dieſe allgemeine Einheit A, ſo iſt demnach in der Multiplication

A..v = a..p; alſo bei endlichem Multiplicator:

A.,.$\frac{n}{m}$ = a.,.p; bei unendlichem Multiplicator:

A.?.ȣ = a.?.p.

Daher kann auch die Multiplication ſo definirt werden: a mit v multipliciren heiſst, a als Vorderglied des Verhältniſſes ſetzen, und von a, nach Maſsgabe von v, ein Hinterglied ſuchen, ſo daſs ſich a zu ſeinem Hintergliede p (dem Product) verhält, wie die abſolute Einheit A zu v.

Wenn z. B. Fig. 1. b mit $\frac{2}{3}$ multiplicirt wird, ſo muſs ſich b zum Producte, das iſt zu a, verhalten, wie überhaupt das Einfache zum $\frac{2}{3}$-fachen.

Und umgekehrt in der Divifion mufs fein

$v\,.\,.\,A = a\,.\,.\,q$; alfo bei endlichem Divifor
$v\,.\,,\,.\,A = a\,.\,,\,.\,q$; und bei unendlichem Divifor
$v\,.\,?\,.\,A = a\,.\,?\,.\,q$.

Daher kann auch die Divifion fo definirt werden: a mit v dividiren heifst, a als Hinterglied des Verhältniffes fetzen, und von a, nach Mafsgabe v, ein Vorderglied fuchen, fo dafs fich a zu feinem Hintergliede q (dem Quotienten) verhält wie v zur abfoluten Einheit A.

Wenn z. B. Fig. 1. a mit $\frac{2}{3}$ dividirt wird, fo mufs fich a zum Quotienten b verhalten, wie überhaupt das $\frac{2}{3}$-fache zur Einheit.

Sowohl durch Multiplication als durch Divifion bei endlichen oder unendlichen Vielheiten (v) kann man ein fo Kleines oder Grofses erhalten als man will (quavis dabili et adfignabili magnitudine majus vel minus).

Denn v kann gegen feine abfolute Einheit immer kleiner und immer kleiner, auch immer gröfser und gröffer werden. Wenn aber *bei der Multiplication*

α) v immer, fo weit man will, gegen die abfolute Einheit abnimmt, fo nimmt auch das Product, p, immer ab gegen a; es mag nun $v = \frac{n}{m}$ oder $= \aleph$ fein. Es kann alfo p fo klein werden als man will.

β) v immer, fo weit man will, zunimmt, fo nimmt auch p immer zu; es mag $v = \frac{n}{m}$ oder $= \aleph$ fein. Es kann alfo p fo grofs werden als man will.

Wenn

Wenn hingegen *bei der Division*

α) v immer, so weit man will, abnimmt, so wird a als immer eine kleinere Zahl angesehen, also die Einheit dazu, q, immer grösser; es mag nun $v = \frac{n}{m}$ oder $= \infty$ sein. Also kann q so groß werden als man will.

β) v immer, so weit man will zunimmt, so wird a immer als ein grösseres Vielfaches angesehen, also die Einheit dazu, q, immer kleiner; es mag $v = \frac{n}{m}$ oder $= \infty$ sein. Also kann auch q so klein werden als man will.

Und es folgt also hieraus für endliche $\left(\frac{n}{m}\right)$ und unendliche (∞) Vielheiten:

So wie der Multiplicator zunimmt, oder abnimmt, nimmt auch das Product zu, oder ab.

So wie aber der Divisor zunimmt, nimmt der Quotient ab, und wie der Divisor abnimmt nimmt der Quotient zu.

Man drückt diess auch so aus:

Der Multiplicator und das Product stehen in geradem (directem), der Divisor aber und der Quotient in ungeradem (indirectem, negativem, reciprokem) Wachsthume.

Unter *Wachsthum* wird hier Zunahme sowohl als Abnahme verstanden.

Die Buchstaben a, ʌ, v, $\frac{n}{m}$, ȣ, p, q bedeuten, was oben angegeben ist.

Eine Gröſse, a, mit einem Vielfachen multipliciren, heiſst ſoviel als, a, mit dem entgegengeſetzten Vielfachen dividiren; und umgekehrt: eine Gröſse a mit einem Vielfachen dividiren, heiſst ſoviel als a mit dem entgegengeſetzten Vielfachen multipliciren.

Für endliche Vielfache iſt dieſs ſchon in 17, a, bewieſen. Da aber hier der Begriff der Multiplication und Diviſion auch auf unendliche Multiplicatoren und Diviſoren erweitert worden iſt, ſo muſs dieſe Behauptung hier ganz allgemein bewieſen werden.

Was ein entgegengeſetztes Vielfaches heiſse, iſt aus 9, 10, 11, 16 deutlich. Ich habe das entgegengeſetzte Vielfache eines endlichen Vielfachen $\frac{n}{m}$ durch $\frac{m}{n}$, und das entgegengeſetzte Vielfache eines unendlichen Vielfachen ȣ durch ᵜ bezeichnet. Wenn nun im allgemeinen v jedes Vielfache, endliches und unendliches bedeutet, ſo bedeute ʌ jedes umgekehrte oder entgegengeſetzte v.

Die Behauptung dieſes Satzes heiſst alſo:

a . v = a : ʌ; und a : v = a . ʌ

Darin ſind folgende ſpecielle Sätze enthalten:

$a . \frac{n}{m} = a : \frac{m}{n}$; und $a : \frac{n}{m} = a . \frac{m}{n}$ (17a).

a . ȣ = a : ᵜ; und a : ȣ = a . ᵜ.

Denn

Denn wenn a mit v multiplicirt wird, ſo wird aus ihm als Hinterglied, das Vorderglied p (18) gebildet; p iſt alſo das v - fache von a; alſo iſt (16) a von p das umgekehrte Vielfache, alſo das ʌ - fache von p; wird alſo a als das ʌ - fache angeſehen, das iſt, durch ʌ *dividirt*, ſo erhält man a; w. z. e. w.

Wird aber a mit v dividirt, oder als das v - fache angeſehen, ſo iſt es Vorderglied, und q dazu das Hinterglied; alſo iſt q dazu die Einheit; alſo auch iſt a das v - fache von q, und demnach q das umgekehrte Vielfache, das ʌ - fache, von a; wenn man alſo von a aus das ʌ - fache conſtruirt, das iſt, a durch v multiplicirt, ſo erhält man auch q; w. z. e. w.

(Wer das Folgende leſen und verſtehen will, muſs ſich dieſe Definitionen und Lehrſätze über Multiplication und Diviſion durch genug beſtimmte Beiſpiele anſchaulich und geläufig machen; dergleichen hier auszuführen, die nothwendige Kürze nicht verſtattet.)

20.

Durch das § 17b gezeigte Verfahren findet man zu a und b, wenn es einen ſolchen giebt (wenn a . , . b) das gröſste gemeinſame Maſs, das es für a und b giebt. Es iſt die Frage, ob es nicht kleinere Gröſsen als das gefundene gröſste gemeinſchaftliche Maſs giebt, die ſowohl a als b (durch ganze Wiederholungen) meſſen?

Das gröſste gemeinſchaftliche Maſs heiſse M, jedes kleinere aber m.

Das kleinere gem. Maſs zu a.,.b, m, kann ſein

a) der beſtimmtvielte Theil von M *einmal* (pars aliquota τε M); ſo iſt klar: daſs der 2te, 3te, 4te,...... n-te Theil von M auch ſowohl a als b meſſen muſs. Denn a und b beſtehen aus lauter ganzen M, da alſo m 1M miſst, ſo miſst es auch 2, 3, 4..... n-mal M. Es giebt alſo für a und b unendlich viele m, nehmlich

$$\frac{1}{2}M, \frac{1}{3}M, \frac{1}{4}M \ldots\ldots \frac{1}{n}M.$$

Nimmt man ſtatt M, $\frac{1}{2}$ M zum Maſse für a und b, ſo erhält man noch einmal ſo groſse Zahlen, weil $\frac{1}{2}M = m$ in jedem M 2mal liegt.

Nimmt man aber $\frac{1}{3}$ $M = m$, ſo wird das Verhältniſs a..b in dreimal ſo groſsen Zahlen genannt.

Nimmt man, allgemein, $\frac{1}{n}$ $M = m$ ſo erhält man a..b in n-fachen Zahlen, das iſt in n-mal ſo groſsen Zahlen.

Z. B. Fig. 34. a..b = 1..2 nach M, nach $\frac{1}{2}$ M 2..4, nach $\frac{1}{3}$ M, 3..6, nach $\frac{1}{4}$ M 4..8.

Hieraus ergiebt ſich zugleich, daſs eben dadurch, daſs man nach der Reihe $\frac{1}{2}$ M, $\frac{1}{3}$ M, $\frac{1}{4}$ M,..... $\frac{1}{n}$ M als Maſs für a und b annimmt, daſſelbe Verhältniſs, auf ſo vielerlei Art, in immer gröſseren Zahlen ausgedrückt werden könne, als man will, was auch ſchon oben, in 17b iſt bewieſen worden.

b) der beſtimmtvielte Theil von M mehrere mal, jedoch wenigere mal als zu einem ganzen M gehört (pars aliquota τ*ς* M, aliquoties ſumta, neque tamen ita multoties ut fiat = 1 M).

Z. B. $\frac{2}{3}$ von M; ſo miſst m = $\frac{2}{3}$ M nicht ein M, ſondern da bleibt 1 m = $\frac{1}{3}$ M übrig; aber 2 M werden von $\frac{2}{3}$ M gemeſſen, denn im erſten bleibt $\frac{1}{3}$ M übrig, auch im zweiten M; alſo nimm die beiden Reſte zuſammen, ſo erhältſt du wieder 1 m = $\frac{2}{3}$ M. Alſo iſt 2 M = 3mal $\frac{2}{3}$ M = 3mal m (Fig. 35.). Da nun $\frac{2}{3}$ M = m nur 2 ganze M miſst, nicht aber *ein* M, ſo müſste auch a ſowohl als b durch 2 M theilbar ſein wie z. B. Fig. 35. a . . b = 1 . . 2 = 2 M . . 4 M, iſt auch theilbar durch $\frac{2}{3}$ M = m; das iſt a . . b = 2 M . . 4 M = 2 . . 4 = 3 m . . 6 m = 3 . . 6. In Figur 36. aber iſt a und b nicht durch $\frac{2}{3}$ M theilbar, weil a . . b = 1 M . . 2 M. Daraus alſo iſt deutlich, wenn a und b durch $\frac{2}{3}$ m theilbar ſein ſollen, ſo müſſen beide durch 2 M theilbar ſein; alſo muſs nicht M das gröſste gemeinſame Maſs ſein, ſondern 2 M. Wenn man aber bei Auſſuchen des, a und b gemeinſamen Maſses nach 17b verfährt, ſo erfährt man ſogleich das gröſste gemeinſame Maſs, alſo kann dann nicht $\frac{2}{3}$ M ein gemeinſames Maſs für a und b ſein.

Wollte man fragen ob $\frac{2}{4}$ von M ein Maſs für a und b ſei, ſo iſt $\frac{2}{4}$ nur ſcheinbar ein aliquanter Theil von 1 (das iſt von M), den $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Von ſolchen ſcheinbar aliquanten Theilen von M, da ſie an ſich aliquote Theile davon ſind, gilt das unter a Gefundene.

Kann

Kann aber $\frac{3}{4}$ von M ein gemeinſ. Maſs für a und b ſein? $\frac{3}{4}$ miſst nicht 1 M, da bleibt $\frac{1}{4}$ übrig; dazu vom nächſten M $\frac{2}{4}$ genommen, giebt wieder 1 m, und bleiben vom 2ten M $\frac{2}{4}$ übrig, dazu $\frac{1}{4}$ vom 3ten M, ſo erhält man zuſammen 3 m, und bleiben vom 3ten M gerade noch $\frac{3}{4}$ alſo 1 m übrig. Alſo miſst $\frac{3}{4}$ M = m *zuerſt* 3 M und 3 M = 4 m (Fig. 37.). Soll daher dieſs m ſowohl a als b meſſen, ſo muſs a und b aus lauter dreifachen M beſtehen, alſo auch von 3 M gemeſſen werden, welches, wenn M das gröſste gem. Maſs iſt, nicht möglich iſt. Daher giebt es auch, wenn man nach 17b verfahren iſt, kein m = $\frac{3}{4}$ M.

Kann ferner $\frac{5}{7}$ M = m ein gem. Maſs für a und b ſein? Im erſten M, wenn m weggenommen wird, bleiben $\frac{2}{7}$ M übrig, im zweiten M, zum erſten gedacht, bleiben $\frac{4}{7}$ M übrig, im 3ten alſo bleiben $\frac{6}{7}$, oder vielmehr $\frac{1}{7}$ übrig, im 4ten alſo $\frac{3}{7}$, im 5ten erſt $\frac{5}{7}$, alſo dieſe, = m auch noch hinweggenommen, nichts, übrig. Es ſind alſo 5 M = 7 m. Alſo muſs, wenn m ein gem. Maſs zu a und b ſein ſoll, auch 5 M eins ſein.

Ich behaupte nun allgemein, wenn $\frac{o}{p}$ allgemeiner Ausdruck jedes *an ſich* aliquanten Theiles von M iſt, daſs $\frac{o}{p}$ M, das o-fache von M meſſe, und zwar im o-fachen M, gerade das p-fache von m gelegen ſei, das iſt, daſs dann M . o = m . p. Denn $\frac{p}{p} = 1$.

Nimmt

Nimmt man alſo von $\frac{o}{p}$ das p-fache, ſo hat man $\frac{o}{p} \cdot p = o$ (das iſt das o-fache der Einheit), worin alſo $\frac{o}{p}$ gerade p-mal gelegen iſt. So iſt alſo auch $\frac{p}{p}$ von $M = M$, alſo wenn $\frac{o}{p}$ von M p-mal genommen wird, ſo wird jedes p-theil in den $\frac{o}{p}$ Theilen $= \frac{p}{p}$ von M $= 1$ M. alſo iſt auch $\frac{o}{p}$ von M, in o-mal M gerade p mal.

Z. B. $\frac{2}{7}$ von M als m geſetzt; es iſt $\frac{7}{7}$ von M $= 1$ M; nimmt man alſo $\frac{2}{7}$ von M 7mal, ſo erhält man $\frac{1}{7} \cdot 7 + \frac{1}{7} \cdot 7 = \frac{1 \cdot 7}{7} + \frac{1 \cdot 7}{7} = \frac{7}{7} + \frac{7}{7} = 2$ M; und es iſt alſo auch in 2 M gerade m ($= \frac{2}{7}$ von M) 7mal gelegen, weil es, wie bewieſen, 7mal genommen 2 ganze M giebt.

Hieraus nun folgt im allgemeinen:

Soll a und b von $\frac{o}{p}$ gemeſſen werden, ſo müſſen beide auch von o-mal M gemeſſen werden (worin $\frac{o}{p}$ p-mal liegt), alſo muſs es auſser M für a und b noch ein gröſseres gemeinſames Maſs geben als M (nehmlich o-mal M), welches, wenn M das gröſste iſt, nicht ſein kann. Nun aber findet man, wenn man nach 17b verfährt, wirklich das gröſste

Maſs

Maſs für a und b; alſo kann es dann auch keinen *an ſich* aliquanten Theil von M geben, der a und b meſſen könnte.

c) Könnte nicht das kleinere Maſs, m, vom gröſsten, M, ein unnennbarer (idealiſcher) Theil ſein, und a und doch b meſſen, alſo m.?.M? Dieſs iſt unmöglich, denn wenn m a und b miſst, ſo muſs auch m, M meſſen.

Z. B. F. 38., ſei a..b nach dem gröſsten gem. Maſs M = 2..5; alſo iſt M von b der 5te und von a der 2te Theil. Geſetzt nun es meſſe m ſowohl a als b; alſo b ſei = 15m und a = 6m; ſo muſs der 5te Theil von m im 5ten Theile von b, = M auch 15mal liegen; eben ſo der 2te Theil von m 6mal in $\frac{1}{2}$ a = M; demnach iſt ein beſtimmtvielter Theil von m beſtimmtviele ganze male in M, alſo m.,.M; wäre alſo m.?.M ſo wäre auch m.?.a und m.?.b.

Denn im allgemeinen, wenn m in a p-mal in b aber q-mal gelegen, ferner M von a der r-te, von b aber der ſ-te Theil iſt; ſo muſs der r-te Theil von m auch p-mal in M (als dem r-ten Theile von a), und der ſ-te Theil von m q-mal in M (als dem q-ten Theile von b) gelegen ſein. Alſo miſst der r-te und auch der ſ-te Theil von m, ſowohl m als M; alſo iſt m.,.M wider die Vorausſetzung.

Wenn man alſo durch die § 17b gezeigte Vergleichung M gefunden, ſo giebt es für a..b keine anderen gemeinſamen Maſse als die, welche *ein* aliquoter Theil von M ſelbſt ſind.

Daher

Daher läſst ſich eben ein und daſſelbe Verhältniſs immer in gröſseren Zahlen darſtellen, jenachdem man nach der Reihe $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{n}$ des gröſsten Maſses annimmt. Ein Verhältniſs nun, das nach ſeinem gröſsten Maſse, alſo in kleinſten Zahlen, ausgedrückt iſt, heiſst ein *Wurzelverhältniſs*. Daher findet man nach 17, b lauter Wurzelverhältniſſe.

Hat man für a..b irgend ein Maſs, μ, ohne zu wiſſen, ob es gerade das gröſste iſt, ſo gelten in Abſicht eines anderen gem. Maſses, m, für a..b, folgende Sätze:

α) Alle aliquote Theile von μ ſind auch gem. Maſs für a..b; und wenn ein aliquoter Theil von μ a..b miſst, ſo folgt daraus nicht, daſs es auſer μ noch ein gröſseres Maſs für a..b geben müſſe.

β) Wenn auſer μ ſich noch ein m findet, der Form: daſs es ein aliquoter Theil von m mehrere male, doch $< \mu$ iſt (z. B. $\frac{2}{3}$ von μ), alſo allgemein $m = \frac{n-p}{n}$ von μ; ſo muſs auch (n—p) mal μ ein gem. Maſs für a..b ſein, alſo muſs es auch ein gröſseres Maſs noch geben als μ (nach dieſes §. b.).

γ) Wenn ſich auſer μ noch ein anderes gemeinſames Maſs, m, für a..b findet, welches $> \mu$, aber keiner Anzahl ganzer μ gleich iſt, (z. B. $\frac{5}{3}$ μ) ſo muſs es auch noch ein gröſseres als dieſes gröſsere geben, und zwar wenn dergleichen m durch $\frac{n+p}{n}$ ausgedrückt wird, iſt dieſs noch höhere Maſs gleich (n+p)mal m; z. B. wenn auſer μ auch noch $\frac{5}{3}$ μ a und b miſst: ſo muſs auch 5 μ a und b meſſen, Fig. 39. Der Beweiſs dafür iſt derſelbe, als unter dieſes §. b.

21. Da-

21.

Dadurch, daſs man weiſs, wie das Verhältniſs von 2 Gröſsen a und b zu erforſchen und auszudrücken iſt, weiſs man auch wie das Verhältniſs von 3, 4, 5....n Gröſsen gegen einander zu erforſchen und auszudrücken iſt. Geſetzt nehmlich es ſeien 5 Gröſsen a, b, c, d, e vorgelegt, deren Verhältniſs aller zu allen gefunden werden ſoll, ſo hat man dieſs Verhältniſs dann gefunden, wenn man eine ſechſte Gröſse kennt, die gemeinſch. Maſs für alle 5 iſt, als deren Zahlen alſo alle 5 benannt werden. Wir betrachten zu dem Ende erſt das Verhältniſs dreier Gröſsen gegen einander, dann vierer ... um die Auflöſung dieſer Aufgabe ſodann im allgemeinen zu erkennen.

(Das gefundene Verhältniſs von 4 Gröſsen z. B. werde ſo bezeichnet: a..b..c..d.)

a)

Es ſei das Verhältniſs der drei Gröſsen a, b, c zu finden; ſo muſs man wiſſen a..b, a..c, b..c.

α) wenn alle 3 gegen alle 3 commenſurabel, alſo a.,.b, a.,.c, b.,.c.

Suche das gröſste gem. Maſs zwiſchen a..b nach 17 b; es heiſse m, ſo erhältſt du a..b in kleinſten Zahlen. Um aber a..b..c zu kennen, muſs man eine Einheit haben, die ſowohl a, als b, als c ausmiſst, dieſe allen dreien gem. Einheit heiſse M; da nun m das gröſste Maſs iſt, welches a und b ausmiſst, ſo muſs M entweder = m oder kleiner ſein; alſo, nach 20, ein aliquoter Theil von m. Suche alſo zwiſchen m und c den gröſsten gemeinſchaftlichen Maſsſtab, ſo iſt dieſer M; und miſst a und b und

und c, und ist der gröſste den es giebt (17, b), also das Verhältniſs a..b..c nach ihm ausgedrückt, in kleinsten Zahlen.

Z. B. Fig. 40., ist a..b = 2..3, also m = $\frac{1}{3}$b, und $\frac{1}{2}$a. Suche das Verhältniſs von m..c; so ist m in c 3mal, bleibt α; α verglichen mit m, ist in m 1mal, bleibt β; β aber in α ist gerade 2mal, also ist β gem. Maſs für m und c; und zwar $\beta = \frac{1}{3}$ m; $\frac{1}{3}$ m also miſst sowohl a als b als c. Und es ist a..b..c in kleinsten Zahlen = 6..9..11.

Oder: suche erst a..b, und b..c, sodann das gemeinsame Maſs der für diese beiden Verhältnisse gefundenen gröſsten Maſsstäbe, so ist das zwischen diesen beiden gem. Maſsen gemeinsame Maſs das gröſste gem. Maſs für a, b, c. Denn es heiſse das gem. Maſs für a..b, μ, das aber für b..c, m, das gemeinsame Maſs aber für a..b..c, M. So muſs M sowohl $< \mu$ als $<$ m sein und sowohl μ als m theilen, und zwar von dem einen wie vom andern (20) ein aliquoter Theil sein; also ist M gemeinsames Maſs für μ und m; und zwar das gröſste zwischen beiden wird die kleinsten Zahlen für a, b, c geben; suche also das gröſste gem. Maſs nach 17 b für μ..m so erhältst du den kleinsten Zahlenausdruck für a..b..c.

Z. B. F. 41. ist a..b = 1..2, und b..c = 3..4; suche m..μ, so ist m in μ 1mal, bleibt α, α aber 2mal giebt gerade m, also ist α das gröſste gem. Maſs zwischen m und μ, also auch zwischen a..b..c; demnach a..b..c im kleinsten Zahlen = 3..6..8.

Hierbei

Hierbei ist zu bemerken, dass b allemal durch beide gemeinsame Masse, das ist durch das für a..b, und das für b..c theilbar sein müsse; z. B. in 3..6..8 ist 6 durch 2 und auch durch 3 theilbar.

β) Wenn von a..b..c eins oder 2 oder alle 3 Verhältnisse (a..b, a..c, b..c) incommensurabel sind, welches eben erst zu untersuchen. Um hierüber zu entscheiden, schicke ich die hiehergehörigen Sätze über Commensurabilität und Incommensurabilität voraus, insofern sie mittelbar durch Vergleichung erkannt wird.

1. Wenn eine Grösse, a, .,. zu einer andern Grösse, b, : so ist auch die erstere, a, .,. zu jeder endlichen Vielheit (Zahl) der anderen, b. Allgemein ausgedrückt:

$$\frac{a.,.b}{a.,.b.\frac{n}{m}}$$ (dieser Strich heisst: *folglich.*)

Wenn nun a.,.b, so ist a auch eine endliche Vielheit von b, das ist eine Zahl von b (9); wir können also auch a durch $b.\frac{p}{q}$ ausdrücken wobei also $\frac{n}{m}$ und $\frac{p}{q}$ jede mögliche endliche Vielheit ausdrücken. Jede Zahl ist aber (9) eine ganze oder eine gebrochne; und wenn sie ein Bruch ist, entweder *ein* aliquoter Theil der Einheit (z. B. $\frac{1}{7}$) oder ein aliquoter Theil der Einheit mehreremale. Daher also bei diesem Beweise dreierlei zu beweisen ist, dass wenn a.,.b a gegen alle ganze Zahlen, alle aliquote Theile, und jedes ganze Vielfache jedes aliquoten Theiles von b, als Einheit, commensurabel sei.

aa) Es

aa) Es ſei alſo a.,.b, ſo iſt a auch .,. gegen jede ganze Zahl von b; denn jede ganze Zahl beſteht aus lauter ganzen Einheiten, was alſo die Einheit miſst, miſst auch ſie; nun aber iſt a, als Zahl von b, .,. zu b, alſo auch zu jeder gan- Zahl von b.

bb) Es ſei ferner a.,.b, ſo iſt auch a.,. zu jedem aliquoten Theile $\left(\frac{1}{p}\right)$ von b. Denn weil a.,.b ſo giebt es ein gemeinſames Maſs, m, für a..b, welches auch ein aliquoter Theil von b iſt (17. b); daher muſs bewieſen werden daſs alle aliquoten Theile von derſelben Einheit b gegen einander .,. ſind, das iſt, daſs es einen dritten aliquoten Theil von b giebt, der beide erſtere aliquote Theile durch ganze Wiederholungen ausmiſst. Zuerſt einige Beiſpiele:

Es werde z. B. unterſucht ob $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ (derſelben Einheit, b, verſteht ſich) .,. ſeien. Anſtatt Fig. 42. $\frac{1}{3}$ von der ganzen b zu nehmen, kann ich $\frac{1}{3}$ von jedem Theile derſelben nehmen; daher muſs 2mal der dritte Theil von $\frac{1}{2}$ b $= \frac{1}{3}$ vom ganzen b ſein; der dritte Theil von $\frac{1}{2}$ b iſt vom ganzen der 2.3te, d. i. der 6te Theil; alſo iſt $\frac{1}{3}$ b $= \frac{2}{6}$ b; und es miſst alſo $\frac{1}{6}$ b ſowohl $\frac{1}{2}$ b als auch $\frac{1}{3}$ b, alſo iſt auch $\frac{1}{2}$.,.$\frac{1}{3}$. Oder man vergleiche, Fig. 43. den kleineren dritten Theil mit der gröſseren Hälfte; ſo bleibt bei jedem $\frac{1}{2}$ ein Stück, r, übrig; alſo iſt 2mal $\frac{1}{3} + 2 . r = 1$; aber auch $3 . \frac{1}{3} = 1$; alſo iſt auch $2 . r = \frac{1}{3}$; r aber miſst ſowohl $\frac{1}{3}$ als auch $\frac{1}{2}$; denn in $\frac{1}{3}$ iſt r 2mal, in $\frac{1}{2}$ aber 3mal, weil $\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + r$. Da nun r in dem gröſseren $\frac{1}{2}$ gerade ſo viel mal iſt als r übrig

übrig bleiben, alſo 3mal, ſo iſt auch r vom Ganzen der 2mal 3te, d. i. der 6te Theil.

Oder es werde unterſucht, ob $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{5}$. , . ſeien. Anſtatt, F. 44, vom Ganzen $\frac{1}{5}$ zu nehmen, kann ich von allen ſeinen Theilen, alſo von allen 3 $\frac{1}{3}$ Theilen, die fünften Theile zuſammennehmen; alſo iſt $3 . \frac{1}{3} . \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$; alſo der 3mal 5te, der 15te Theil, iſt gemeinſames Maſs für $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{5}$; und es iſt $\frac{1}{3} = \frac{5}{15}$ aber $\frac{1}{5} = \frac{3}{15}$. Oder, nach F. 45, vergleiche das kleinere $\frac{1}{5} = \alpha$ mit dem gröſseren $\frac{1}{3} = \beta$; ſo bleibt bei jedem β ein Reſt $= r$; alſo iſt $3\alpha + 3r = 1$ aber auch $5\alpha = 3\alpha + 2\alpha = 1$; alſo $3r = 2\alpha$; daraus iſt beſtimmt, wie viele r auf 1α gehen, denn wenn 3r 2α geben, ſo muſs die Hälfte von 3r 1α geben; die Hälfte von r aber erhält man wenn man $\frac{1}{2}r$ 3mal nimmt, alſo iſt $\frac{3}{2}r = \alpha$. Alſo miſst $\frac{1}{2}r$ ſowohl α als β; denn $\alpha = \frac{3}{2}r$, und $b = \alpha + r$, alſo $b = \frac{3}{2}r + r = \frac{3}{2}r + \frac{2}{2}r = \frac{5}{2}r$. Alſo verhält ſich $\alpha \,..\, \beta = \frac{1}{5} \,..\, \frac{1}{3} = \frac{3}{2}r = \frac{5}{2}r = \frac{3}{2} \,..\, \frac{5}{2} = 3 \,..\, 5$.

Nun den allgemeinen Beweiſs!

Es heiſsen die beiden aliquoten Theile $\frac{1}{p}$ $(= a)$ und $\frac{1}{q}$; ſo kann man, anſtatt $\frac{1}{q}$ von 1 zu nehmen, $\frac{1}{q}$ von jedem $\frac{1}{p}$ zuſammen nehmen; alſo iſt $\frac{1}{q}$ (nehmlich von 1, der abſoluten Einheit) $= p . \frac{1}{q}$ vom $\frac{1}{q}$, oder $p . \frac{1}{q} . \frac{1}{p}$; aber $\frac{1}{q} . \frac{1}{p}$ (d. i. der qte Theil vom pten Theile der

1 iſt

$\frac{1}{pq}$ ist der pmal-qte Theil von 1, weil in jedem pten Theile q Theile genommen werden; also ist $\frac{1}{q} = p \cdot \frac{1}{pq}$; und $\frac{1}{p} = q \cdot \frac{1}{pq}$; daher misst $\frac{1}{pq}$ sowohl $\frac{1}{p}$ als $\frac{1}{q}$; indem $\frac{1}{p} = \frac{q}{pq}$ und $\frac{1}{q} = \frac{p}{pq}$ ist. Es verhält sich also auch

$$\frac{1}{p} .. \frac{1}{q} = \frac{q}{pq} .. \frac{p}{pq} = q .. p.$$

Oder auf die andere Art:

Es sei in $\frac{1}{p}$ und $\frac{1}{q}$ q grösser als p, so ist $\frac{1}{q}$ kleiner als $\frac{1}{p}$ (z. B. $\frac{1}{9} < \frac{1}{7}$), weil, je grösser der Nenner eines Bruchs (9) je in mehr Theile das Ganze, 1, getheilt werden muss, je kleiner also die Theile werden. Da nun $\frac{1}{q} < \frac{1}{p}$, so muss $\frac{1}{p} - \frac{1}{q}$ einen bejahten Rest geben (13b), dieser heisse r, so ist also $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = r$; demnach jedes $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + r$; da nun in 1 pmal $\frac{1}{p}$ liegt; also $1 = p \cdot \frac{1}{p}$, jedes $\frac{1}{p}$ aber $= \frac{1}{q} + r$ ist, so ist auch $1 = p \cdot \frac{1}{q} + pr$. Nun ist aber auch $1 = q \cdot \frac{1}{q}$. Also ist auch $p \cdot \frac{1}{q} + pr = q \cdot \frac{1}{q}$; $p \cdot \frac{1}{q}$ sind wenigere qtheile als $q \cdot \frac{1}{q}$; also giebt $(q \cdot \frac{1}{q}) -$

$(p.\frac{1}{q}) = t.\frac{1}{q}$ das ist eine, bestimmte Menge qtheile, und zwar ist $t =$ dem Unterschiede der Zahlen p und q (z. B. bei $p = 11$, und $q = 7$ ist $t = 4$). Es ist also $p.\frac{1}{q} + t.\frac{1}{q} = 1$. Aber auch $p.\frac{1}{q} + pr = 1$; also auch $pr = t.\frac{1}{q}$. Hieraus nun ist bestimmt wie viele r auf $\frac{1}{q}$ gehen, denn da $t.\frac{1}{q} = pr$; so muss der t-te Theil von $pr = \frac{1}{q}$ sein, oder auch der t-te Theil von einem r pmal $= \frac{1}{q}$, also $\frac{1}{q} = p.\frac{1}{t}.r$. Also misst $p.\frac{1}{t}.r$ aus $\frac{1}{q}$; aber es misst auch $\frac{1}{p}$; denn $\frac{1}{p}$ ist $= \frac{1}{q} + r$, und $p.\frac{1}{t}.r$ misst r, denn der bestimmtvielte nehmlich der t-te Theil von einem r pmal genommen giebt, nach dem vorigen $\frac{1}{q}$, aber derselbe t-te Theil von r misst auch r, als seine ganze Zahl, also misst der t-te Theil von r auch $\frac{1}{p}$. Also ist der t-te Theil von r das gemeinsame Mass von $\frac{1}{p}$ und $\frac{1}{q}$. Und zwar ist $\frac{1}{t}.r$ in $\frac{1}{q}$ pmal gelegen; in $\frac{1}{q}$ aber p-mal und noch t-mal; aber $t = q - p$ also auch $p + t = q$; also ist der t-te Theil von r in $\frac{1}{p}$ q-mal gelegen; da also $\frac{1}{t}$ von r, in jedem $\frac{1}{p}$ q-mal gelegen, so liegt er im Ganzen p mal-

q-mal;

q-mal; es iſt alſo das gemeinſame Maſs für $\frac{1}{p}$ und $\frac{1}{q}$ der pmal q-te Theil, $= \frac{1}{pq}$ der abſoluten Einheit; und es verhält ſich

$$\frac{1}{p} .. \frac{1}{q} = \frac{q}{pq} .. \frac{p}{pq} = q .. p.$$

Alſo iſt immer $\frac{1}{p} . , . \frac{1}{q}$, *welches z. e. war.*

(Ich habe mit Fleiſs dieſe allgemeine Bezeichnung dieſer Auflöſung hergeſetzt, um den noch ungeübten Leſer dadurch Anleitung zu geben, ſich in der *allgemeinen* Sprache der Mathematik, zu üben, und im *allgemeinen* doch lebendig und beſtimmt anzuſchauen. Man muſs ſich ſogleich beſtimmte Beiſpiele bilden, ſie in Linien darſtellen, und nach der allgemeinen Bezeichnung auflöſen.)

Hieraus folgt nun ferner:

daſs auch alle gebrochne, endliche Vielfache commenſurabel ſind; denn es werde im allgemeinen der eine Bruch, der aus einem mehrfachen aliquoten Theile der Einheit beſteht, durch $\frac{n}{m}$ der andere durch $\frac{r}{s}$ bezeichnet (z. B. $\frac{3}{5} .. \frac{11}{7}$); ſo iſt $\frac{n}{m}$ eine ganze Zahl von $\frac{1}{m}$, und $\frac{r}{s}$ eine ganze Zahl von $\frac{1}{s}$; wenn alſo $\frac{1}{m} . , . \frac{1}{s}$ ſo müſſen auch deren ganze Zahlen commenſu-

 rabel

rabel sein (nach aa); nun aber ist so eben, daſs $\frac{1}{m}$.,. $\frac{1}{s}$, bewiesen worden, also ist auch $\frac{n}{m}$.,. $\frac{1}{s}$.

Daher auch $\frac{1}{m}$.,. $\frac{r}{s}$, ebenfalls $\frac{n}{m}$.,. $\frac{1}{s}$. Es sollte unter bb) bewiesen werden, daſs wenn a.,.b auch a.,. $\frac{1}{p}$ von b; dieſs aber ist bewiesen; denn a ist selbst Zahl von b, also entweder $\frac{1}{m}$ von b oder $\frac{n}{m}$ von b; in beiden Fällen aber ist a.,. $\frac{1}{p}$ von b. Denn b als Einheit gesetzt, ist, wie so eben bewiesen worden, sowohl $\frac{1}{m}$.,. $\frac{1}{p}$ als auch $\frac{n}{m}$.,. $\frac{1}{p}$.

Auch läſst sich hieraus sogleich über die noch übrigen Fälle entscheiden, denn

cc) es sei a.,.b, so ist auch a.,. $\frac{r}{s}$ von b. Denn a ist selbst Zahl von b, also entweder eine ganze Zahl von b oder eine gebrochne; ist a eine ganze Zahl, so wird a von $\frac{1}{s}$ von b gemessen nach aa) ist also a.,. $\frac{r}{s}$ b; oder a ist eine gebrochne Zahl von b, also entweder $\frac{1}{m}$ von b, so ist, wie unter bb) bewiesen $\frac{1}{m}$ b.,. $\frac{r}{s}$ b; oder $\frac{n}{m}$ von b, so ist ebenfalls, wie unter cc) erwiesen, $\frac{n}{m}$ von b.,. $\frac{r}{s}$ von b.

Also

Alfo ift in allen möglichen Fällen, wenn a.,.b, a auch .,. gegen jede endliche Vielheit von b.

Worin auch folgende Behauptungen bewiefen liegen:

Alle Zahlen derfelben Einheit find commenfurabel. Und umgekehrt: wenn 2 Gröfsen gegen einander commenfurabel find fo find fie Zahlen derfelben Einheit.

Wenn ferner 2 Gröfsen gegen einander .?. find, fo find fie nicht Zahlen derfelben Einheit.

2) Wenn eine Gröfse gegen die Einheit commenfurabel, fo ift fie es auch gegen jede Zahl diefer Einheit. Wenn a.?.b, fo ift auch a.?. gegen jede endliche Vielheit (Zahl) von b.

Denn wäre a.,. zu irgend einer Zahl, $\frac{n}{m}$ von b, fo wäre, nach 1) auch a eine Zahl von b, alfo .,. zu b.

3) Wenn a.,.b, fo ift a gegen jede zu b incommenfurable Gröfse .?., oder mit andern Worten: Wenn a.,.b, fo ift a.?. zu jeder idealifchen Vielheit, ϰ, von b.

Denn weil ϰ.b.?.b, und a Zahl von b; fo ift nach 2, ϰ.b.?.a, alfo auch umgekehrt a.?.ϰ.b.

4) Wenn a.?.b, fo kann a gegen eine zu b incommenfurable Gröfse, ϰ.b, commenfurabel fein.

Denn wenn a und ϰ.b Zahlen derfelben Einheit find, fo find fie beide gegen eine dritte Gröfse, wogegen a.?. ift, .?. (1 diefes §).

5) Wenn

5) Wenn a.,.b, so sind auch alle endliche Vielheiten derselben .,. (d. i. so ist $\frac{n}{m}$ a.,. $\frac{n}{m}$ b) (1 dieses §).

6) Wenn a.?.b, so sind auch alle endliche Vielheiten beider Einheiten .?. (d. i. so ist $\frac{n}{m}$ a.?. $\frac{n}{m}$ b).

Denn widrigenfalls, wenn es nehmlich von $\frac{n}{m}$ a.?. $\frac{n}{m}$ b ein gem. Maſs gäbe, so müſste es auch ein solches für a.?.b geben, wider die Voraussetzung (1 dieses §).

7) Wenn 2 Gröſsen zu einerlei dritten Gröſse .,., so sind sie unter sich selbst.,.

Denn sie sind Zahlen der dritten Gröſse als Einheit (1 d. §).

8) Wenn 2 Gröſsen zu einerlei dritten Gröſse .?., so können sie doch gegen einander .,. sein.

Denn wenn die beiden .,. sind, so sind sie Zahlen derselben Einheit, ist nun die dritte Gröſse gegen die erste .?., so ist sie es auch gegen die zweite (1 d. §), da dennoch die erste .,. zur zweiten.

Wenn demnach das Verhältniſs von a..b..c zu finden, so sind hiebei folgende Fälle möglich:

αα) a.?.b, auch a.?.c, so kann b..c commens. oder incommens. sein; dann läſst sich a.?.b und a.?.c niemals ganz genau in Zahlen ausdrücken, wohl aber b.,.c, falls b.,.c; man suche also erst b.,.c ganz genau, den für b.,.c gefundenen gröſsten gem. Maſsstab, m, vergleiche mit a, und suche m.?.a (denn weil

weil c.?.a und b.?.a, ſo muſs auch jeder aliquote Theil von beiden, alſo auch m, .?.a ſein) ſo genau als du willſt, ſo bleibt dabei, wenn nach dem Maſsſtabe, μ, von m.?.a, alle 3 Gröſsen ausgedrückt werden, immer b.,.c, nur immer in gröſseren Zahlen. Iſt aber auch b.?.c, ſo kann man nur für alle 3 Verhältniſſe zugleich einen immer genaueren, nie aber ganz genauen Ausdruck finden.

ββ) a.?.b und a.,.c, ſo muſs auch b.?.c (3 d. §); alſo ſuche erſt a.,.c, dann das Verhältniſs des gem. Maſses, m, für a.,.c, zu a.?.b, welches Verhältniſs .?. iſt (6 d. §) immer genauer, ſo miſst das dafür gefundene immer genauere Maſs, μ, a.,.c ganz genau, aber immer in gröſseren Zahlen, je genauer es dabei a.?.b und b.?.c miſst.

γγ) a.,.b und a.?.c, ſo iſt auch b.?.c (3 d. §), es gilt alſo hier was vom vorigen Falle ββ) gilt.

b)

Soll das Verhältniſs von 4 Gröſsen, a..b..c..d gefunden werden, ſo ſuche a..b, dann das Verhältniſs des gemeinſch. Maſses für a..b, α, zu c, alſo α..c; dann das Verhältniſs des hier gefundenen gemeinſamen Maſses β..d; ſo findeſt du das gröſste gem. Maſs, γ, zwiſchen allen 4 Gröſsen, alſo auch den Ausdruck aller 4 gegen einander in kleinſten Zahlen.

Denn α miſst gröſstens a..b, alſo β gröſstens a..b..c; alſo γ gröſstens a..b..c..d.

Sind dabei unendliche Verhältniſſe, ſo muſs man ſich, wenn man ſie in Zahlen haben will, mit irgend einer Näherung begnügen; die endlichen Verhältniſſe bleiben immer ganz genau.

c) Soll

c)

Soll daher von n Gröſsen, a..b..c..d..e..... das Verhältniſs aller gegen alle in kleinſten Zahlen gefunden werden, ſo ſuche aus a..b, das gröſste gemeinſchaftliche Maſs α; dann ſuche aus α..c das gröſste gem. Maſs β, dann aus β..d ſuche γ, aus γ..e ſuche δ, und ſo fort bis auf die letzte Gröſse, das zuletzt gefundene gemeinſame Maſs iſt das gröſste gemeinſch. Maſs für alle zuſammen.

Denn das gr. gem. Maſs für a..b..c muſs auch a..b meſſen alſo auch deſſen gemeinſames Maſs α, alſo iſt das gr. gem. Maſs für a..b..c das gröſste gem. Maſs für α..c, $= \beta$. Das gr. gem. Maſs für a..b..c..d muſs auch a..b..c meſſen, alſo auch β, alſo iſt es das gr. gem. Maſs für β..d; u. ſ. w.

22.

Das Weſen jedes Verhältniſſes beſteht in der Beſtimmtheit der Vielheit, welche ſeine beiden Glieder gegen einander ſind (3), und es gilt dieſs von endlichen und unendlichen Verhältniſſen (9). Nun aber drückt der Exponent (18), abgeſehen von der individuellen Gröſse der Glieder, allgemein dieſe Beſtimmtheit der Vielheit aus: alſo beſteht auch das Weſen jedes Verhältniſſes in der Beſtimmtheit des Exponenten. Werden alſo die Glieder des Verhältniſſes, a und b, auf irgend eine Art ſo verändert, daſs die Beſtimmtheit der Vielheit der Glieder gegen einander, oder der Exponent, unverändert bleibt, ſo bleibt auch dabei das Verhältniſs unverändert, widrigenfalls wird auch das Verhältniſs (des Vorderglieds zum Hintergliede oder umgekehrt) verändert, alſo vergröſsert oder verkleinert.

Da ſchon mehrere Veränderungen der Glieder des Verhältniſſes betrachtet worden ſind, Seite 108 bis 115, ſo

werde

werde ich mich hier, bei der vollständigen Betrachtung aller hiebei möglichen Fälle, auf den dort geführten Beweifs einzelner Fälle beziehen.

Die verfchiedenen Fälle der Veränderung der Glieder des Verhältniffes müffen nach folgenden Rückfichten abgetheilt werden: 1. jenachdem allein a, oder b, oder a und b verändert werden 2. jenachdem die Veränderung durch Addition und Subtraction, oder durch Multiplication und Divifion gefchieht.

Bei den Beweifen ift darauf zu fehen, dafs fie fowohl endliche als unendliche Verhältniffe umfaffen, daher auch diejenigen Beweifsarten, die blos von endlichen Verhältniffen gelten in ihrer Befchränktheit zu erkennen find.

Wird ein einzelnes Glied verändert, a oder b, fo mufs das Verhältnifs geftört werden, weil jedes Verhältnifs durch die abfolute Gröfse beider Glieder beftimmt ift (3).

Werden aber beide, a und b verändert, fo find hierbei folgendes die oberften Fälle.

1) a und b werden auf gleiche Weife verändert.

a) beide durch Addition. Das zu a addirte heifse α, das zu b addirte β; a und b feien von gleichen pofitiven Zeichen. So ift

α) $\alpha = \beta$, fo wird das Verh. a..b, wenn es eins der Ungleichheit ift, geftört, z. B. aus 3..7 werde 5..9, fo ift 5..9 $\gtrless$ 3..7, und weil Daffelbe gegen das Kleinere beträchtlicher ift als gegen das Gröfsere, alfo 2..5 $>$ 2..7 (S. 109.), fo ift 5..9 $>$ 3..7. Denn nur, wenn a und b in demfelben Verhältniffe gröfser oder kleiner werden, als fie felbft find, das ift wenn $\alpha..\beta = a..b$,

kann

kann das Verh. ungeſtört bleiben (S. 112.). Iſt aber a..b ein Verh. der Gleichheit, ſo bleibt auch dadurch das Verh. ungeſtört, weil auch $\alpha = \beta$. Sind α und β negativ, ſo gilt das Gleiche; z. B. wenn aus 11..13 wird 10..12 = 5..6, ſo iſt $\alpha = -1 = \beta$; 1..11 > 1..13, alſo wird von 11 in Verhältniſſe mehr genommen als von 13, alſo iſt auch (108) 10..12 < 11..13.

β) $\alpha \gtrless \beta$ aber $\alpha..\beta$ = a..b; ſo iſt a + α..b + β = a..b = $\alpha..\beta$. Der S. 112. dafür gegebne Beweiſs gilt ganz allgemein für endliche und unendliche Verhältniſſe. Für endliche Verhältniſſe kann man ihn anſchaulicher (wiewohl nicht gründlicher) ſo führen:

Es ſei Fig. 46. a..b = 2..3 = $\alpha..\beta$. Ich behaupte, auch a + α..b + β = 2..3. Denn nimmt man den 2ten Theil von a und dazu den 2ten Theil von b zum gemeinſ. Maſse an, ſo iſt dieſer in a + α 2mal in b + β aber 3mal.

γ) a $\gtrless$ β, aber $\alpha..\beta \gtrless$ a..b; ſo iſt wenn $\alpha..\beta$ > a..b, a + α..b + β > a..b; iſt aber a..β < a..b, ſo iſt a + α..b + β < a..b.

Denn wenn $\alpha..\beta$ > a..b, und wird zu a α, zu b β geſetzt, ſo wird zu a im Verhältniſs mehr geſetzt, als zu b, alſo iſt dadurch das Vorderglied a + α gröſser gegen ſein Hinterglied b + β (17b).

Und wenn $\alpha..\beta$ < a..b, ſo wird, wenn zu a α geſetzt, verhältniſsmäſsig nicht ſoviel geſetzt als zu b, wenn zu b β geſetzt wird, alſo wird a + α kleiner gegen ſein Hinterglied b + β, als a..b iſt (17b).

Sind aber bei der Addition α und β beide negativ, ſo iſt es gerade der Fall als wenn poſitive α und β ſubtrahirt werden

ſollen

ſollen (13b). Und da hiebei es nicht darauf ankommt, ob man die Veränderung als Addition oder Subtraction anſehe, ſondern ob durch die Veränderung a und b vergröſsert oder verkleinert werden, ſo ſind hier ſich nur die beiden Fälle entgegen zu ſetzen, daſs entweder α und β poſitiv ſind und hinzugenommen werden, oder beide poſitiv ſind und hinweggenommen werden. Oben S. 112. iſt im allgemeinen bewieſen worden, daſs, wenn $\alpha..\beta = a..b$, ſowohl $a+\alpha..b+\beta$ als auch $a-\alpha..b+\beta$ gleich ſein müſſen $a..b$ und $\alpha..\beta$; allein da auch hier der entgegengeſetzte Fall betrachtet werden muſs, wenn $\alpha..\beta$ Z $a..b$, dieſer aber, nachdem durch die Veränderung a und b kleiner oder gröſser werden, verſchieden iſt, ſo iſt nun noch blos der Fall zu betrachten übrig, wenn beide α und β poſitiv ſind und von a und b weggenommen werden. Alſo:

b) beide durch Subtraction poſitiver α und β; ſo iſt:

α) $\alpha = \beta$. Iſt hiebei a Z b, ſo wird das Verhältniſs $a..b$ in $a-\alpha..b-\beta$ geſtört. Iſt zwar $a > b$ in $a..b$, ſo iſt (S. 109.) $\alpha..a < \beta..b$, alſo wird in $a-\alpha..b-\beta$, a verhältniſsmäſsig zu wenig verkleinert, alſo $a-\alpha..b-\beta > a..b$. Z. B. $17..11 = a..b$; $\alpha = 3 = \beta$; alſo iſt $17-3..11-3 = 14..8 = 7..4 > 17..11$. Iſt aber auch $a = b$, ſo iſt auch $a-\alpha..b-\beta = 1..1$.

β) α Z β aber $\alpha..\beta = a..b$, ſo iſt auch $a-\alpha..b-\beta = a..b = \alpha..\beta$. Der allgemeine Beweiſs iſt S. 112. geführt worden; für endliche Verhältniſſe iſt es auf folgende Art darzuthun:

Es ſei Fig. 49. $a..b = \alpha..\beta = 1..2$; wird nun α und β negativ genommen, ſo iſt $a+-\alpha..b+-\beta = a-\alpha..b-\beta = a..b$. Denn ſetze das Gegentheil, daſs $a-\alpha..b-\beta$ nicht $= a..b$; ſo iſt dennoch laut der Vorausſetzung wenn man zu $a-\alpha = c$, $+\alpha$ ſetzt, und zu $b-\beta = d$, $+\beta$ genommen wird, das entſtehende Ver-

Verhältnifs, nehmlich $c + \alpha .. d + \beta = a .. b$ = dem Verhältniffe $c .. d$; ift aber letzteres, fo ift auch, nach dem vorigen Beifpiele, fowohl $\alpha .. \beta$ als auch $a - \alpha .. b - \beta = a .. b$, wider die Vorausfetzung.

(Auch wenn $\alpha > a$ und demnach $\beta > b$, alfo das entftehende Verhältnifs negative Gröfsen giebt, mufs es nach S. 112. $a .. b$ = fein, welches aus dem andern, fpeciellen Beweifse für endliche Verhältniffe nicht erhellet; z. B. $a .. b = 1 .. 2$, $\alpha .. \beta = 3 .. 6$, fo ift $1 - 3 .. 2 - 6 = -2 .. -4 = +2 .. +4$ (§. 14.) $= 1 .. 2 = 3 .. 6$).

γ) $\alpha \gtrless \beta$, aber auch $\alpha .. \beta \gtrless a .. b$. Wenn nun $\alpha .. \beta < a .. b$ fo ift $a - \alpha .. b - \beta > a .. b$ (S. 113.). Ift aber $\alpha .. \beta > a .. b$ fo ift $a - \alpha .. b - \beta < a .. b$ (S. 114.). Hierbei wird vorausgefetzt, dafs wenn anftatt $\alpha .. \beta$ und $a .. b$ individuelle Werthe gefetzt werden $\alpha < a$ und $\beta < b$ ift. Denn widrigenfalls entfteht gerade das entgegengefetzte Refultat; denn es fei z. B. gegeben $a .. b = 2 .. 3$ und $\alpha .. \beta = 4 .. 5$, fo ift $4 > 2$ und $5 > 3$, aber $4 .. 5 > 2 .. 3$; es ift alfo $a - \alpha .. b - \beta = 2 - 4 .. 3 - 5 = -2 .. -2$, welches Verhältnifs $> 2 .. 3$. Es ift aber, nach 14, das Verhältnifs zweier Negativzahlen das gleiche als das zweier Pofitivzahlen. Nun ift $-2 + 4 .. -3 + 5 = +2 .. +2$; alfo auch $+4 - 2 .. +5 - 3$ das Gleiche, fetze alfo $a .. b = 4 .. 5$ und $\alpha .. \beta = 2 .. 3$, und nimm $4 - 2 .. 5 - 3 = 2 .. 2 = -2 - 2$. Demnach gilt dann wenn α von a und β von b weggenommen werden foll, und beide gröfser als ihre homologen Glieder in $a .. b$ find, gerade das Umgekehrte.

c) Beide a und b werden durch Multiplication, mit endlicher oder unendlicher Vielheit (18, 19) verändert, fo kann der Multiplicator entweder gleich oder ungleich fein.

α) der

α) der Multiplicator für a und b ist gleich, so wird dadurch das Verhältniſs nicht gestört, das ist, wenn v wieder jede endliche und unendliche Vielheit bedeutet (19), es ist a..b = a.v..b.v (oder sowohl a..b = $a \cdot \frac{n}{m} \, .. \, b \cdot \frac{n}{m}$ als auch a..b = a.8..b.8.).

Denn die Gröſse des Verhältnisses a.v..b.v wird bestimmt durch die Gröſse des Verhältnisses a..b, und die Vervielfachungszahl (den Multiplicator), ist demnach diese für a und b gleich, so wird durch den andern Bestimmungsgrund nicht verändert, was und wie es durch den ersten gesetzt war; also ist a.v..b.v = a..b.

β) Der Multiplicator, v, für a und b ist ungleich, so wird

aa) entweder a mit einer höheren Vielheit multiplicirt als b, so wird auch das Vorderglied gröſser als das Hinterglied im Verhältniſs. Es werde also a mit (v + p), b aber mit v multiplicirt, so ist a.(v + p)..b.v > a..b; z. B. 1..2 = a..b, v = 2, (v + p) = 3, so ist 1.3..2.2 = 3..4 > 1..2.

Denn eine *höhere* Vielheit heiſse gegen ihre niedere die, in welcher auſer den Theilen der Einheit die in der niederen sind, noch andere sind, so ist so eben unter α bewiesen worden, daſs wenn diese Vielheiten von einerlei Höhe (gleich sind), das Verhältniſs gleich bleibe; da nun in a.(v + p) auſer a.v noch p Theile von a genommen werden müssen, so wird dadurch das Vorderglied zu groſs, also das Verhältniſs a.(v + p)..b.v > a..b.

bb)

bb) oder a mit einer niedern und b mit einer höhern Vielheit multiplicirt, ſo wird das neue Verhältniſs $< a..b$. Oder $a.v..b.(v+p) < a..b$.

Denn $a..b = a.v..b.v$; aber $b.(v+p) = b.v + b.p > b.v$; alſo iſt $a.v..b.(v+p) < a.v..b.v$, alſo auch $< a..b$.

d) Beide a und b werden durch Diviſion verändert, alſo a ſowohl als b als beſtimmte, endliche oder unendliche Vielheiten angeſehen und die Einheiten dazu (die Quotienten) geſucht. Es heiſse wieder der Diviſor v (19); ſo iſt v für a und b entweder gleich oder ungleich; $(v+p)$ heiſse hierbei jede gröſsere Vielheit als v.

α) a und b werden durch dieſelbe Vielheit dividirt, ſo muſs $a:v..b:v = a..b$ ſein.

Denn die Gröſse des Verhältniſſes $a:v..b:v$ wird beſtimmt durch die Gröſse des Verhältniſſes $a..b$, und die Gröſse von v; iſt alſo der andere Beſtimmungsgrund gleich, ſo verhält ſich das Beſtimmte ſo wie der erſte Beſtimmungsgrund, alſo $a:v..b:v = a..b$; z. B. $8..12 = 8:4..12:4 = 2..3$.

Auch erhellet dieſs ſchon daraus, daſs (19) a und b durch v dividiren ſoviel iſt als a und b durch ʌ multipliciren, aber das umgekehrte v gleich iſt, wenn v ſelbſt gleich iſt; wodurch die Fälle der Diviſion beider Glieder auf die der Multiplication gebracht werden, die eben ſchon abgehandelt ſind.

β) a und b werden durch verſchieden hohe Vielheiten dividirt, ſo wird

aa) entweder $a:(v+p)$, und $b:v$, so ist $a:(v+p)..b:v < a..b$.

Denn (19) je grösser der Divisor je kleiner die gesuchte Einheit, (der Quotient), demnach ist $a:(v+p) < a:b$ also auch (17b) $a:(v+p)..b:v < a:v..b:v$; nun aber ist $a:v..b:v = a..b$ (d,α), also auch $a:(v+p)..b:v < a..b$.

bb) oder $a:v$, und $b:(v+p)$, so ist $a:v..b:(v+p) > a..b$.

Denn (19) je kleiner der Divisor, je grösser die gesuchte Einheit (der Quotient), demnach ist $b:v > b:(v+p)$, also auch (17, b) $a:v..b:(v+p) > a:v..b:v$; nun aber ist (d,α) $a:v..b:v = a..b$, also auch $a:v..b:(v+p) > a..b$.

Es folgt also hieraus

ganz im allgemeinen: dass, wenn beide Glieder eines Verhältnisses mit gleichen Vielheiten (endlichen oder idealischen) multiplicirt, oder auch dividirt werden, das Verhältniss unverändert bleibe, widrigenfalls aber verändert werde. Will man den Beweiss nur für Zahlen, als Multiplicatoren und Divisoren haben, so kann diese Behauptung auf folgende anschauliche Art bewiesen werden:

Jede Division in Zahlen kann als Multiplication angesehen werden (17a), und jeder Multiplicator ist entweder eine ganze Zahl, n, oder eine gebrochne, $\frac{n}{m}$, und in letzterem Falle ist der Bruch entweder ein aliquoter Theil, $\frac{1}{m}$, oder

ein

ein aliquanter, $\frac{1+n}{m}$. Wenn daher erwiesen wird, dafs a..b unverändert bleibt, wenn man beide mit n, $\frac{1}{m}$ und $\frac{1+n}{m}$ multiplicirt, so ist allgemein bewiesen, dafs a..b unverändert bleibt, wenn man a und b mit einerlei Zahl multiplicirt oder dividirt. Ich will diefs für die einzelnen Fälle gleich in einigen Beispielen beweisen, woraus sich Jeder den allgemeinen Ausdruck des Beweises bilden kann.

Es ist a.n..b.n = a..b; denn Fig. 48. sei a..b = 2..3; beide werden durch 2 multiplicirt, so kommt 4..6, diefs ist = 2+2..3+3, es verhält sich aber 2..3 = 2..3 also auch (wie 1, a, β erwiesen) 2+2..3+3 = 2..3.

Es ist ferner a. $\frac{1}{m}$..b. $\frac{1}{m}$ = a..b; denn Fig 49. sei a..b = 1..2; beide werden durch $\frac{1}{3}$ multiplicirt so erhält man $\frac{1}{3}$..$\frac{2}{3}$ = 1..2. Da nun $\frac{1}{3}$ = $\frac{1}{3}$ derselben Einheit, so ist auch $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$.. $\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}$ = 1..2 = $\frac{1}{3}$..$\frac{2}{3}$ (1, a, β.)

Daher ist auch a. $\frac{1+n}{m}$..b. $\frac{1+n}{m}$ = a..b, denn es ist dieser Fall aus den beiden genannten zusammengesetzt; denn erstlich mufs man von a und von b $\frac{1}{m}$ nehmen, es verhält sich aber a. $\frac{1}{m}$..b. $\frac{1}{m}$ = a..b; sodann a. $\frac{1}{m}$ sowohl als b. $\frac{1}{m}$ mit (1+n) vervielfachen, welches

eine

eine ganze Zahl ist, der Voraussetzung nach; also ist auch $a . \frac{1+n}{m} .. b . \frac{+n}{m} = a .. b.$

Demnach verhalten sich gleiche Vielheiten, wie ihre Einheiten.

2) beide, a und b werden auf ungleiche Weise verändert:

a) Von einem wird etwas hinweggedacht (subtrahirt) zu dem andern aber etwas hinzugedacht (addirt). Bei allen hierhergehörigen Fällen kommt es darauf an, ob die eine Gröſse vergröſsert, die andere verkleinert wird, oder ob sie beide vergröſsert oder beide verkleinert werden.

α) die beiden Gröſsen welche hinzu oder weggedacht werden, α und β sind beide positiv; also wenn $a - \alpha .. b + \beta$ genommen wird, so ist dieſs Verhältniſs in doppelter Rücksicht (S. 110, β) $< a .. b$; und wenn $a + \alpha .. b - \beta$ genommen wird, so ist dieſs Verhältniſs (S. 110, α) in doppelter Rücksicht $> a .. b$.

β) α und β sind beide negativ; so entsteht immer hiebei der erste Fall, denn $a - - \alpha .. b + - \beta = a + \alpha .. b - \beta$, und $a + - \alpha .. b - - \beta = a - \alpha .. b + \beta$.

γ) Sind aber α und β von verschiedenen Zeichen, so ergiebt sich entweder, daſs wirklich beide a und b vergröſsert oder verkleinert werden, oder es entsteht ebenfalls einer von den unter α) genannten Fällen; z. B. $a - - \alpha .. b + - \beta = a + \alpha .. b - \beta$; aber $a + + \alpha .. b - - \beta = a + \alpha .. b + \beta$, wo es nun darauf ankommt, ob $\alpha .. \beta \gtreqless a .. b$.

Wenn man nun unter *Vermehrung* versteht: Vergröſserung durch Addition positiver Gröſsen, und unter *Vermin-*

 derung:

derung: Verkleinerung durch Subtraction poſitiver Gröſsen; ſo gilt allgemein: Wenn von a und b eines durch Vermehrung, das andere durch Verminderung verändert wird, muſs auch das Verhältniſs verändert werden.

b) a und b werden durch Diviſion und Multiplication verändert. Wenn hiebei der Multiplicator umgekehrt (16, 19) genommen den Diviſor giebt, ſo iſt das Reſultat gleich (172), alſo auch das Verhältniſs noch daſſelbe, weil die gleichen Vielheiten gleiches Verhältniſs haben als die Einheiten (nach dieſes §a); z. B. $2..5 = 2.2..5:\frac{1}{2} = 2.2..5.2$; im allgemeinen $a.v..b:A = a..b = a:v..b.A$. Sind aber die beiden Vielheiten wodurch das eine Glied dividirt das andere aber multiplicirt wird, und umgekehrt, ungleiche Vielheiten, wenn der Diviſor umgekehrt (17) wird, ſo muſs auch (nach dieſes §a) das Verhältniſs geſtört werden, ſo wie die hiebei untergeordneten Fälle ſchon in dieſes §a betrachtet worden ſind.

c) Das eine Glied von a und b, wird durch Vermehrung, das andere durch Multiplication verändert; ſo kann das neue Verhältniſs gleich oder ungleich ſein, jenachdem die durch die Multiplication gemachte Veränderung auch eine proportionale Vermehrung iſt oder nicht, z. B. $2..3 = 2+4..3.3 = 6..9$, aber $2..3 > 2+3..3.3 = 5..9$. Iſt aber hiebei der Multiplicator < 1, ſo muſs nothwendigerweiſe das Verhältniſs gröſser werden, wenn a durch Vermehrung, und kleiner, wenn b durch Vermehrung verändert wird, d. i. $a+p..b.\frac{m-q}{m} > a..b$, aber $a.\frac{m-q}{m}..b+p < a..b$.

d) Das eine Glied wird durch Vermehrung, das andere durch Diviſion verändert, ſo gilt das Gleiche was unter c) gilt, nur mit der Veränderung, daſs wenn n jeden Diviſor

ſor > 1 bedeutet $a + p .. b : n > a .. b$, und $a : n .. b + p < a .. b$ iſt; nicht aber umgekehrt $a + p .. b : \frac{m-q}{m} < a .. b$ und $a : \frac{m-q}{m} .. b + p > a .. b$.

e) Das eine Glied wird durch Verminderung das andere durch Multiplication verändert; ſo gilt auch hier daſſelbe was unter c), nur daſs $a - p .. b . n < a .. b$ und $a . n .. b - p > a .. b$.

f) Das eine Glied wird durch Verminderung, das andere durch Diviſion verändert; ſo gilt auch hier das unter c, Erinnerte, nur daſs $a - p .. b : \frac{m-q}{m} < a .. b$ und $a : \frac{m-q}{m} .. b - p > a .. b$ iſt.

Noch iſt hierbei zu bemerken, daſs das Hinzugenommene, Hinweggenommene, der Multiplicator und Diviſor bei dieſen Veränderungen die Glieder ſelbſt ſein können; alſo iſt

$$a + a .. b + b = a .. b$$
$$a - a .. b - b = a .. b = 0 .. 0$$

dieſs ſcheint zu widerſprechen, widerſpricht aber nicht, indem hierdurch vielmehr das Verhältniſs ganz vernichtet wird.

$$a + a + a .. b + b + b = a .. b$$
$$a - a - a .. b - b - b = -a - a .. -b - b$$
$$= -2a .. -2b = 2a .. 2b \text{ (14) } = a .. b$$
$$a . a .. b . a = a .. b$$
$$a . b .. b . b = a .. b$$
$$a : a .. b : a = a .. b$$
$$a : b .. b : b = a .. b$$

$$a . a . . b : \frac{1}{a} = a . . b$$

$$a : a . . b . \frac{1}{a} = a . b$$

u. f. w.

Hieraus ergiebt fich auch, *dafs jedes Verhältnifs auf die Form* $1 \,..\, 1 \mp p$ *gebracht werden kann* ($\mp$ foll heifsen: p kann fowohl + als — fein); denn wenn man eine Vielheit durch fich felbft dividirt, fo fragt man, wie die Einheit heifse, wovon fie diefe beftimmte Vielheit ift; das ift die abfolute Einheit A felbft (z. B $3 : 3 = 1$; $\frac{2}{3} : \frac{2}{3} = 1$). Man dividire alfo a durch fich felbft, und auch b durch a, fo kann das Verhältnifs nicht geftört werden, und man erhält ein Verhältnifs von der verlangten Form; z. B.

$$3 .. 5 = 1 .. \tfrac{5}{3}$$

$$7 .. 3 = 1 .. \tfrac{3}{7}$$

$$a .. b = 1 .. \frac{b}{a}.$$

Auch kann hierbei a..b .,. oder .?. fein.

Auf gleiche Art kann man auch jedes Verhältnifs auf die Form $1 \mp p .. 1$ bringen, wenn man beide Glieder durch das Hinterglied dividirt; denn es ift

$$a .. b = 1 .. \frac{b}{a} = \frac{a}{b} .. 1$$

$$2 .. 3 = 1 .. \tfrac{3}{2} = \tfrac{2}{3} .. 1.$$

Es ift hierbei nur in allen möglichen Fällen *darüber* entfchieden worden, ob das neue Verhältnifs gleich oder ungleich, und im letzten Falle ob es kleiner oder gröfser fei; nicht aber wiffen wir bis jetzt zu beftimmen, *um*

wie

wie viel denn ein Verhältniſs gröſser ſei als das andere; dieſs bleibt alſo als Aufgabe für die folgenden Betrachtungen. Z. B. 2.3..5.4 < 2..5, es fragt ſich um wie viel?

23.

Von jeder beliebigen Gröſse aus läſst ſich eine andere conſtruiren, welche gegen die erſtere ein gegebnes endliches oder unendliches Verhältniſs hat (8. 19). Wenn alſo 2 Gröſsen a und c gegeben ſind, ſo kann man zu a eine Gröſse b finden. und zu c eine Gröſse d, ſo daſs a..b = c..d, wobei a..b ein beliebiges endliches oder unendliches Verhältniſs ſein kann. Von dergleichen 4 Gliedern zwei gleicher Verhältniſſe ſagt man: ſie ſeien *in Proportion*, oder auch wohl: ſie ſeien *eine Proportion* (bei älteren Mathematikern heiſst ein jedes einzelne Verhältniſs *Proportion*, und 2 gleiche Verhältniſſe *Analogie*); z. B. F. 50 iſt a..b = c..d = 2..3. Beide gleiche, endliche, Verhältniſſe können auch allgemein ausgedrückt ſein in Zahlen (9), denn es giebt von jedem Verhältniſſe unendlich vielerlei Ausdrücke in Zahlen (20) z. B. 2..5 = 4..10.

Die vier Gröſsen a, b, c, d, ſollen *Glieder* der Proportion heiſsen; a und b zuſammen und c und d zuſammen die beiden *Sätze* der Proportion und zwar a und b der *Vorderſatz*, c und d der *Hinterſatz*: diejenigen Glieder in beiden Sätzen, welche *beide* Vorder- oder Hinterglieder ſind, *homologe* oder *gleichnamige Glieder*; die verſchiedenliegenden aber (a und d, b und c) *anomologe* oder *ungleichnamige Glieder*.

Die Glieder des Vorderſatzes müſſen aus derſelben Art von Gröſse ſein (8), ſo auch die Glieder des Hinterſatzes. Die beiden Glieder des Vorderſatzes können aber aus einer ganz fremd-

fremdartigen Sphäre von Gröſse ſein als die des Hinterglied.s.

Denn in jeder Art von Gröſse kann von beliebiger Gröſse aus jedes beliebige Verhältniſs conſtruirt werden (8).

Auch können a und b von derſelben Art der Gröſse ſein als c und d; dann iſt a.,.c oder a.?.c.

Denn man kann von jeder Gröſse aus jedes Verhältniſs bilden, alſo auch ſowohl von denen aus, welche.,.a, als auch von denen, welche.?.a.

Wenn a.,.b ſo iſt auch c.,.d; und wenn a.?.b, ſo iſt auch c.?.d, und zwar ganz auf die gleiche Art a.?.b als c.?.d.

Denn ſonſt wären beide Verhältniſſe a..b und c..d nicht gleich, wider die Vorausſetzung.

Wenn a.,.c und a.,.b, ſo ſind alle 4 gegen einander commenſurabel.

Denn da a.,.b, ſo iſt auch c.,.d; alſo b eine endliche Vielheit (Zahl) von a, und d eine endliche Vielheit von c; da nun auch c eine endliche Vielheit von a, indem a.,.c geſetzt wird, alſo die Einheiten a und c.,. ſind, ſo müſſen auch alle endliche Vielheiten (Zahlen) derſelben.,. ſein (22).

Wenn a.,.b, aber a.?.c, ſo iſt auch b.?.d.

Denn d iſt eine endliche Vielheit von c und b eine endliche Vielheit von a; wenn aber die Einheiten a und c.?. ſo ſind es auch alle endliche Vielheiten (Zahlen) derſelben (22).

Wenn

Wenn a.?.b, aber a.,.c, ſo iſt auch b.,.d.

Denn weil c..d = a..b, und nur diejenigen Verhältniſſe gleich ſind, wo die homologen Glieder durch Vervielfachung mit gleichen Vielheiten (22) entſtehen, ſo muſs c von a dieſelbe Vielheit ſein, als d von b. Nun iſt der Vorausſ. nach a.,.c, alſo c eine endliche Vielheit von a, alſo auch d eine endliche Vielheit von b, d. i. b.,.d. Daher ferner:

Wenn a.?.b, auch a.?.c, ſo iſt auch b.?.d (wobei alſo auch c.?.d).

Wenn in a.,.c a und c nach einer beliebigen abſoluten Einheit ausgedrückt werden, und es iſt a.?.b, alſo auch c.?.d, ſo können entweder beide homol. Glieder in beiden Sätzen, gegen die abſolute Einheit .?. ſein, oder das eine (a oder b, c oder d) zur abſ. Einheit .,. das andere aber zu ihr .?.

(die abſolute Einheit heiſse A.)

Denn es ſei a $= \frac{n}{m}$ A und auch c $= \frac{n}{m}$ A, und a.?.b, alſo auch c.?.d, ſo iſt doch eben a.,.A, auch c.,.A.

Wenn aber in a.?.b = c.?.d iſt a.?.A, auch c.?.A, und auch b.?.A; demnach auch d.?.A: ſo wäre eben ſowohl a.?.c als auch b.?.d, und dabei alle vier Gröſsen gegen A.?.

Wenn alſo a.,.b, und man nimmt zu einer zu a incommenſurabeln Gröſse, c, daſſelbe endliche Vielfache, d, als b von a iſt, ſo iſt demnach a.,.b auch c.,.d; aber a.?.c, a.?.d, b.?.c, b.?.d.

Die

Da in jeder Proportion, $a..b = c..d$, das Verhältniſs beider Sätze das ganz gleiche iſt, ſo kann man das Weſen jeder Proportion auf folgende Art allgemein ausdrücken.

1) Proportion findet zwiſchen Gliedern zweier gleicher Verhältniſſe ſtatt, welche in beiden Sätzen auf gleiche Art liegen. Oder

2) Proportion findet zwiſchen gleichliegenden Gliedern zweier Verhältniſſe mit gleichem Exponenten ſtatt.

3) Wenn $a..b = c..d$, ſo müſſen in beiden Sätzen gleichliegende Glieder von gleichliegenden Gliedern gleich hohe Vielfache ſein. Alſo a daſſelbe Vielfache von b, als c das Vielfache von d; und b daſſelbe Vielfache von a, als auch d von b iſt (laut der Definition des Verhältniſſes).

Heiſst alſo v, *jedes* Vielfache, denn wir müſſen hier auf endliche unendliche Verhältniſſe zugleich Rückſicht nehmen; ſo iſt der allgemeinſte Ausdruck jeder Proportion zweier Verhältniſſe:

$$b.v..b = d.v..d$$

worin folgende Fälle liegen:

$$b.\frac{n}{m}..b = d.\frac{n}{m}..d.$$

$$b.n..b = d.n..d.$$

$$b.\infty..b = d.\infty..d.$$

oder:

$$a..a.v = c..c.v.$$

worin folgende Fälle liegen:

$$a..a.\frac{n}{m} = c..c.\frac{n}{m}$$

$$a..a.n = c..c.n.$$

$$a..a.\infty = c..c.\infty.$$

oder

oder weil mit v multipliciren ſoviel iſt, als mit Λ dividiren:

$$b : v \,..\, b = d : v \,..\, d$$

oder umgekehrt:

$$a \,..\, a : v = c \,..\, c : v.$$

Nimmt man nun darauf Rückſicht, daſs dabei auch c als eine beſtimmte Vielheit von a angeſehen werden kann: ſo entſteht hieraus folgender noch allgemeinerer Ausdruck, wenn auch u, wie v, jede Vielheit bedeutet

$$a \,..\, av = au \,..\, auv,$$

oder umgekehrt

$$bv \,..\, b = buv \,..\, bu$$

worin alle Fälle liegen, wo v und u geſetzt wird, n, $\frac{n}{m}$, x.

Wenn die Glieder des Nachſatzes anderer Art, als die des Vorderſatzes, ſo kann c nicht als eine Zahl von a, auch d nicht als Zahl von b angeſehen werden.

Da man von jeder Gröſse aus jedes Verhältniſsglied (jede beſtimmte Vielheit) conſtruiren kann, ſo kann man auch zu b dieſelbe Vielheit conſtruiren, als b von a iſt. Dann iſt b zugleich das dritte Glied c; doch ſind wirklich an ſich 4 Glieder, wie es auch zu 2 Verhältniſſen nicht anders ſein kann. Der allgemeine Ausdruck jeder ſolchen Proportion iſt: $a \,..\, b = b \,..\, d$ oder: $a \,..\, av = av \,..\, avv$, oder bei endlichem Verhältniſſe $a \,..\, a\frac{n}{m} = a\frac{n}{m} \,..\, a\frac{n}{m} \cdot \frac{n}{m}$. Denn da in jeder Proportion das Hinterglied in beiden Sätzen das Gleichvielfache des Vorderglieds iſt, ſo muſs im zweiten

Satze

Satze als Hinterglied av = b wieder mit v vervielfacht werden, alſo = avv ſein. Eine ſolche Proportion heiſst eine ſtetige (analogia ſeu proportio continua) im Gegenſatz einer ſolchen, wo c eine andere Gröſse als b, die eine unſtetige (proportio ſeu analogia diſcreta) heiſst.

Da das in der Proportion gleiche Verhältniſs ein endliches oder unendliches ſein kann, ſo kann man auch die Proportionen der Art nach eintheilen, in Proportionen eines endlichen und in Proportionen eines unendlichen Verhältniſſes (proportio rationis finitae, aut proportio rationis infinitae).

Zuvörderſt wollen wir hieraus die weſentlichen Eigenſchaften jeder Proportion erkennen: wobei es darauf ankommt, die Beweiſe der allgemeinen Eigenſchaften allgemein für endliche und unendliche Proportionen zu führen:

1) a iſt daſſelbe Vielfache von b, als c von d; b daſſelbe Vielfache von a als d von c (termini homologi terminorum ſuorum anomologorum ſunt aeque multiplices), und es wird hier unter Vielfachem endliches und unendliches Vielfache verſtanden.

Es folgt dieſs unmittelbar aus der Conſtruction gleicher Verhältniſſe.

2) Wenn a..b = c..d, ſo iſt auch b..a = d..c.

Denn b..a iſt das umgekehrte Verh. von a..b, ſo auch d..c von c..d; da nun die umzukehrenden gleich ſind, ſo ſind es auch die umgekehrten; denn an ſich bleibt das Verhältniſs daſſelbe, ich mag es vorwärts oder rückwärts betrachten, weil dadurch die abſolute Gröſse der Glieder nicht verändert wird.

3) Wenn

3) Wenn a..b = c..d, so ist auch a..c = b..d.

Denn wäre nicht a..c = b..d, so wäre c ein anderes Vielfaches von a als d von b, dann aber könnte auch nicht (22) c..d = a..b sein; denn nur wenn man von 2 Gliedern eines Verhältnisses beiderseits die gleichen Vielfachen nimmt, sind die entstehenden Glieder in demselben Verhältnisse. Also wenn u jede Vielheit bedeutet so ist, wenn a..b = c..d, c = au und d = bu; also a..b = au..bu, folglich auch a..au (= c) = b..bu (= d).

(Es ist zu bemerken dass (nach S. 60) bu = b.u an Bedeutung sein soll, oder von 2 nebeneinanderstehenden Buchstaben der andere den Multiplicator der erste den Multiplicand bedeutet.)

4) Wenn a > oder < b, so ist auch c > oder < d.

Folgt aus der Gleichheit der Vielfachheit (1. d. §.).

5) Wenn c > oder < a, so ist auch d > oder < b.

Weil c = au und d = bu, also (3) a..c = b..d.

6) Von den vier Gliedern a, b, c, d, betragen das grösste und kleinste von allen mehr (sind grösser) als die beiden an Grösse mittleren.

Denn es sei a..b = c..d ein Verhältniss der grösseren Ungleichheit, so ist a > b und c > d. Sind nun die beiden Vorderglieder ungleich, so nimm das Grössere zu a, das Kleinere zu c, welches immer angeht; da also c < a, so ist auch (5) d < b, also auf jeden Fall a das grösste und d das kleinste Glied. Denn wenn eben c < a so ist auch d < b, aber d auch kleiner als c, also d < c < b < a. Da

nun

nun a..b=c..d so ist auch (22, 1, b) a—c..b—d =a..b=c..d. Da aber a>b so ist demnach auch (4) a—c>b—d und, wenn a—c, α, b—d aber β, heisst: $\alpha > \beta$. Nun ist a=c+α, und b=d+β; also a+d=c+α+d>b+c=d+β +c (Figur 51).

Ist aber a..b=c..d ein Verh. der kleineren Ungleichheit, so setze um diesen Fall auf den ersten zu bringen, nach 3 d. §. für a..b=c..d, b..a=d..c, welches in der absoluten Grösse der Glieder, worauf es für die Summen einzig ankommt, nichts verändert.

7) Wenn a und c also auch b und d aus einerlei Sphäre von Grösse sind und nach einerlei absoluter Einheit, A, ausgedrückt werden, so ist das Product des ersten und vierten Gliedes gleich dem Producte der beiden mittleren.

Um diess einzusehen, muss erst folgender Hülfssatz erwiesen sein: Wenn dieselbe Grösse, a, erst durch v hernach durch u multiplicirt wird, so erhält man das Gleiche, als wenn man a erst mit u, hernach mit v multiplicirt.

Denn wenn für a. v. u gesetzt wird a.u, so wird diess letzte um so viel kleiner oder grösser, als v das Vielfache von a ist; wenn man hernach wieder a.u durch v vervielfacht, so wird umgekehrt a.u dadurch in demselben Verhältnisse grösser oder kleiner; z. B. setze ich für 1.3.7 nur 1.7 so erhalte ich nur das $\frac{1}{3}$ von 1.3.7; setze ich aber wieder 1.7.3 so erhalte ich dadurch vom $\frac{1}{3}$ das Dreifache, also 1, Dasselbe.

Da nun weil a..b=c..d, auch folgender Ausdruck dieser Proportion richtig ist (d. §.) a..av=au..auv; so

so ist also ad = aauv und bc = avau = aauv. Oder, weil jedes Verhältniss auf die Form 1..1+p gebracht werden kann (22), so ist, wenn 1..b = c..d, auch 1..1.v = 1.u..1.u.v. Also ad = 1.1.v.u = 1.v.u, und bc = 1.v.1.u = 1.v.u.

Es gilt dieser Beweiss von endlichen und unendlichen Proportionen, weil u und v endliche und unendliche Vielheiten bedeuten.

7) Wenn eine Proportion in Zahlen gegeben ist, ohne die individuelle Grösse von a, b, c, d, zu bestimmen, und im andern Satze sind andere Zahlen, als im ersten in homologen Stellen stehen: so sind entweder beide keine Wurzelverhältnisse, oder nur eins von ihnen ein Wurzelverhältniss, nicht aber beide Wurzelverhältnisse.

Denn in jedem Wurzelverhältnisse in Zahlen ist die absolute Einheit, A, selbst das grösste gemeinsame Mass der beiden Glieder; dasselbe Verhältniss aber nach derselben Einheit ausgedrückt, giebt dieselben Zahlen (dieselben Vielheiten); wenn also a..b ein Wurzelverhältniss, auch c..d das ihm gleiche Wurzelverh., so muss a = c, b = d sein. Ist also c..d in anderen Zahlen als a..b, so kann es, wenn es = a..b, kein Wurzelverhältniss sein, also muss (17b, 18) es für c..d noch eine andere ganze Zahl, 2, 3.... geben, die sowohl c als d theilt; und wenn man hiebei die grösste c und d theilende Zahl nimmt, so muss man das Wurzelverh. a..b selbst erhalten. Z. B. 3..5 = 15..25 = 15:5..25:5 = 3..5. Da ferner dasselbe Wurzelv. auf unendlich vielerlei Weise ausgedrückt werden kann (18), so können beide a..b und c..d keine Wurzelverh. sein, und doch verschiedene Zahlen haben z. B. 6..10 = 15..25; welche man beide, durch ihr

grösstes

größtes gem. Maſs theilend, auf daſſelbe Wurzelverhältniſs reduciren kann.

8) Weil die genannten allgemeinen Eigenſchaften alle nothwendig aus dem Weſen der Proportion, nehmlich der gleichen Vielfachheit homologer Glieder gegen ihre anomologen, folgen, ſo folgt auch: daſs, wenn bei vier Gröſsen a, b, c, d eins der genannten Merkmale ſich nicht findet, auch, wenigſtens in dieſer Ordnung, keine Proportionalität ſtatt finde.

24.

Durch 3 Glieder einer diſcreten Proportion iſt immer das 4te individuell (durchaus) beſtimmt, und man kann zu den gegebnen dreien immer das 4te finden.

Denn durch 2 von den 3en, welche Glieder deſſelben Satzes ſind, iſt der Exponent des Verhältniſſes beſtimmt (das dritte gegebne Glied iſt dabei entweder Vorderglied oder Hinterglied des andern Satzes). Durch den Exponent aber und *ein* Glied iſt das andere individuell beſtimmt (18).

Iſt nun das gegebne Glied das dritte Glied, c, und heiſst der Exponent im allgemeinen $\frac{u}{v}$ (wo u und v alle, endliche und unendliche Vielheiten bedeuten), ſo findet man d aus c, wenn man durch den Exponent in d dividirt (18), alſo $d = c : \frac{u}{v}$; oder (18, S. 141) wenn man c durch u dividirt, und den Quotient durch v multiplicirt. Oder, wenn a und b Zahlen, ſo iſt der Exponent $\frac{a}{b}$ alſo $d = c : \frac{a}{b} = (c : a)\, b$.

Z. B.

Z. B. $1..3 = 7..x$; ſo muſs x aus 7 ſo entſtehen, wie 3 aus 1; alſo 7, weil der Exponent $= \frac{1}{3}$, mit $\frac{1}{3}$ dividirt werden; welches ſoviel iſt, als durch 3 multiplicirt, alſo iſt $x = 21$.

Oder: $2..7 = 6..x$; ſo muſs 6 mit $\frac{2}{7}$ dividirt x geben; 6 aber mit $\frac{2}{7}$ dividiren, heiſst 6 als $\frac{2}{7}$ anſehen, und die Einheit dazu ſuchen (19); alſo muſs 6 in 2 Theile getheilt (mit 2 dividirt), und dieſer Theil hernach 7mal genommen (mit 7 multiplicirt) werden; alſo iſt $x = 21$, und $2..7 = 6..21$.

Iſt aber das gegebne Glied das vierte, d, ſo muſs c, oder das dritte durch Multiplication mit dem Exponenten; oder auch durch Diviſion mit dem Nenner des Exponenten (S. 141) und Multiplication mit dem Zähler des Exponenten in dieſen Quotient gefunden werden. Alſo iſt allgemein $c = d . \frac{u}{v}$ oder $= (d : v) . u$.

Oder wenn a und b Zahlen ſind:

$c = d . \frac{a}{b} = (d : b)\, a$.

Wenn auch a und b nicht individuell beſtimmt, aber beide eben Glieder deſſelben Satzes ſind, doch das dritte individuell beſtimmt iſt; ſo iſt auch dadurch ſchon das vierte individuell beſtimmt; denn durch die beiden erſten iſt der Exponent (Beſtimmtheit der Vielheit) und durch die Individualität der dritten Gröſse die Individualität der vierten Gröſse als gerade dieſer Vielheit beſtimmt.

An ſich betrachtet wird in dem Weſen der Proportion über die Individualität der Glieder gar nichts beſtimmt, weil die Proportion nur Gleichheit der Verhältniſſe iſt, die

Gleich-

Gleichheit aber der Verhältniſſe nur an die gleiche Beſtimmtheit der Vielheit, nicht an beſtimmte Gröſse der Glieder geknüpft iſt.

Wenn demnach 2 Individuen von Gröſse in ein beſtimmtes Verhältniſs geſetzt werden ſollen, ſo daſs die Gröſse des einen vorgeſchrieben iſt, ſo muſs freilich auch dieſe Individualität nach den weſentlichen Eigenſchaften der Proportion überhaupt beſtimmt werden. Der erſte Satz drückt dann immer aus, die allgemeine Norm, nach welcher auch im Individuellen eine Gröſse aus einer andern ſoll gebildet werden.

Es giebt vielerlei Sphären von Gröſsen, welche hier aufzuführen unſchicklich wäre, indem die Arithmetik auf beſtimmte Arten von Gröſse als ſolche, nicht Rückſicht nimmt (I; II 1), welche ſich wechſelſeits ſo beſtimmen, daſs wie die eine wächſt auch die andere wächſt, und umgekehrt, wie die eine abnimmt auch die andere abnimmt; als da iſt z. B. Preiſs und Menge der Waare (bei gleicher Güte derſelben). Wie ſich alſo 2 Gröſsen der einen Art verhalten, ſo verhalten ſich auch in derſelben Ordnung die beiden andern der andern Art. Geſetzt alſo die Preiſse verhielten ſich wie 1 . . 2, ſo müſſen ſich auch die Waaren gegen einander verhalten wie 1 zu 2, wenn alſo die beiden Preiſse P, p und die Waaren W, w ſind, demnach zu P W, und zu p w gehört, ſo iſt P . . p = W . . w; alſo w = (W . p) : P. Da nun hiebei P . . p blos das Verhältniſs andeutet, nach welchem die individuelle Waare w aus der ind. Waare W entſtehen ſoll, und alſo auf die Individualität von P und p, für das Reſultat nichts ankommt, ſo thut man wohl erſt P . . p auf den kleinſtmöglichen Zahlenausdruck zu bringen, weil man mit kleineren Zahlen bequemer rechnet, als mit gröſseren (wenn es nehmlich ganze Zahlen ſind).

Man nennt gewöhnlich diese Regel zu 3 Gliedern einer discreten Proportion das vierte unbekannte zu finden, die Regola de tre, Regula de tribus (sc. propositionibus), oder auch wohl wegen ihrer ausgebreiteten Anwendung für die Wissenschaft und Kunst, die goldne Regel (Regula aurea).

(Man bemerke den doppelten Gebrauch der Buchstaben, als Zeichen von Gröſsen:

a) drückt man dadurch, als durch ganz allgemeine Zeichen, allgemeine Behauptungen über die Natur der Gröſsen aus, z. B. $\frac{n}{m}$ = jeder Zahl, v, jeder Vielheit u. s. w.

b) bezeichnet man bei bestimmten individuellen Rechnungen die zur Zeit noch unbekannten aber aus den gegebnen zu bestimmenden Gröſsen einstweilen mit Buchstaben, besonders den letzten des Alphabets, als durch x, y, z.

25.

1) In jeder stetigen Proportion, a..b = b..d, steht b an Gröſse zwischen a und d inne.

Denn es sei a..b ein Verhältniſs der gröſseren Ungleichheit, so ist $a > b$, also auch (23, 4) $b > d$. Also ist $a > b > d$.

Oder es sei a..b ein Verh. der kleineren Ungleichheit, so ist $a < b$, also auch (23, 4) $b < d$. Also $a < b < d$.

2) a..b mag sein welches es will, so giebt es dazu ein, aber nur ein d.

Denn von jeder Grösse aus kann man jedes Verhältniss setzen, also auch zu b das Verhältniss a..b; durch ein Glied aber eines Verhältnisses, b, und den Exponenten, $\frac{a}{b}$, ist immer das andere Glied individuell bestimmt (18).

3) Wenn b wächst, um w, so muss auch d in doppelter Rücksicht wachsen.

Denn weil a..b = b..d; so kann nicht a..b + w = b..d sein, weil a..b + w < a..b; also muss (22, 1, β) auch zu d im Verhältniss ein Stück, x, gesetzt, werden so dass b..w = d..x; also ist dann a..b + w = b..d + x; diess ist der erste Grund, warum d grösser werden muss, wenn b wächst. Nun aber wird nicht verlangt a..b + w = b..d + x, welches eine discrete Proportion ist, sondern die stetige a..b + w..d + x; diess aber kann keine Proportion sein; denn weil a..b + w = b..d + x eine Proportion war, so kann, wenn das Vorderglied im Hintersatze vergrössert wird, nicht dasselbe Verhältniss bleiben; es muss also auch d um noch ein Stück, y, vergrössert werden, so dass sich (22, 1, β) b..w verhält; wie d + x..y. Also ist erst a..b + w = b + w..d + x + y. Und zwar ist die andere Vermehrung, y, ein grösser Stück für sich betrachtet, als x; denn der selbte Theil von einem Grösseren ist grösser, als von einem Kleineren; nun ist aber d + x > d, es muss aber, der sovielte Theil w von b ist, auch erst von d, dann von d + x genommen werden, also ist der letztere = y > x. Und es ist ferner x..y = d..d + x (weil sich Gleichvielfache wie die Einheiten verhalten) = b..b + w.

Z. B.

Z. B. $1..2=2..4$; man setze für 2, 3, so ist $w=1$; also $1..3=2..6$, demnach $x=2$; und $1..3=3..9$, also $y=9-6=3$; demnach $x..y=6..9=2..3$. Diess Beispiel ist in Figur 52 in Linien.

Wird also b stetig wachsend gedacht, so wächst auch d stetig, und zu jedem b gehört ein d (2 d. §.).

Und umgekehrt wenn b abnimmt, nimmt auch d ab.

Es wird aber nicht behauptet, dass in demselben Masse (Verhältnisse) als b zu oder abnehme, auch d dabei zu oder abnehme. Denn wenn b um w zunimmt, so nimmt d um $x+y$ zu, aber es ist $b..w=d..x$, also wenn d gleichförmig wachsen sollte, so müsste es blos um x wachsen, da es also um $x+y$ wächst, so wird es verhältnissmässig beträchtlicher vergrössert. Also hat die Vermehrung von d zu d ein grösser Verhältniss, als die dazu gehörige Vermehrung von b zu b hat. Und es ist an sich betrachtet, wenn $a<b$, (*für sich*) $w<(x+y)$; denn weil $b..w=d..x$, so ist w das so Vielfache von b als x von d ist; nun aber ist $d>b$, also, da die Gleichvielfachen sich wie die Einfachen verhalten; $x>w$; um so mehr also $(x+y)>w$.

4) zu jedem beliebigen a und d giebt es ein, aber nur *ein* b.

Denn so wie b stetig wächst, wächst auch d stetig; daher auch wie d stetig wächst, b stetig wachsen, also bei jedem d nur einen bestimmten Werth haben muss.

5) Wenn a.?.b, so ist auch b.?.d (23).

6) Wenn a.,.b, so ist auch b.,.d (23).

 7) Ein

7) Ein allgemeiner Ausdruck für a..b = b..d iſt:

a..av = av..avv, oder:

1..1.v = 1.v..1.vv, wobei alſo das erſte Glied = 1 geſetzt wird. Oder auch

bv..b = b..bʌ (18)

denn wenn a das vfache von b, ſo muſs d das umgekehrte Vielfache von b ſein. Oder auch

bv..b = b..b:v

Denn man erhält das umgekehrte Vielfache, wenn man mit dem geraden Vielfachen dividirt (17a).

8) Durch je 2 Glieder einer ſtetigen Proportion iſt auch das dritte beſtimmt.

a) die beiden gegebnen Glieder ſind aus demſelben Satze, alſo a und b, oder b und d. So hat man den Exponenten, und da auch b gegeben, und b zugleich das dritte Glied iſt, ſo folgt auch (24) das 4te d, oder a.

b) die beiden gegebnen Glieder ſind aus verſchiedenen Sätzen; alſo a und b, ſo iſt auch b als zweites Glied gegeben, und derſelbe Fall wie in a); oder a und d, ſo gehört zu jedem a und d (4 d. §) nur *ein* b. Und zwar weil a..b = b..d gleich iſt bv..b = b..b:v, auch (23, 7) das Product aus dem erſten und dritten Gliede = dem Producte der beiden mittleren iſt, alſo bv.(b:v) = bb: ſo findet man b, wenn man a und d in einander multiplicirt, und dann das Vielfache ſucht, welches wenn man die Einheit, wonach a ausgedrückt iſt, 2mal nach einander damit multiplicirt, b giebt.

Z. B.

Z. B. es sei zwischen 4 und 16 die Größse zu finden, gegen welche sich 4 verhält, wie sie selbst zu 16. Es heisse diese Größse z; so ist 4..z = z..16; also 4.16 = z.z; also ist diejenige Größse zu suchen die, wenn man 2mal nach einander die absolute Einheit A damit multiplicirt, giebt 4.16 = 64. In diesem Beispiele giebt es eine solche Zahl, und, weil es nur *ein* z giebt, nur *eine* solche Zahl, nehmlich 8; denn 8.8 = 64. Also ist 4..8 = 8..16, oder 2..4 = 4..8, oder: 1..2 = 2..4, wenn man diese beiden Verhältnisse zu Wurzelverhältnissen macht.

Oder es werde z zu 3 und 7, als äusseren Gliedern gesucht; so ist 3.7 = z.z oder 1.3.7 = 1.zz; also die Zahl zu suchen, welche mit sich selbst multiplicirt und das Product nach A ausgedrückt, 21 giebt; eine solche müsste < 21 sein; aber keine ganze Zahl < 21 giebt mit sich selbst multiplicirt 21; denn 4.4 = 16; 5.5 schon = 25. Also ist z > 4 und < 5; sicher also keine ganze Zahl; also wenn z überhaupt eine Zahl sein soll, müsste es eine gebrochne sein; wenn daher bewiesen wäre, dass kein Bruch mit sich selbst multiplicirt eine ganze Zahl geben könnte, so würde für diesen Fall daraus hervorgehen, dass z gar keine endliche Vielheit (Zahl) sondern eine unendliche idealische sein müsste.

Woraus zugleich hervorgienge, dass bei weitem die meisten ganzen Zahlen zu *mittleren Proportionalgrössen* keine Zahlen, sondern unendliche Vielheiten haben. Oder dass in vielen

Fällen,

Fällen, wenn a.,.d, doch ſowohl a.?.b als, d.?.b ſei; daſs alſo, wenn gleich a.,.d, daraus noch nicht *im allgemeinen* folge, daſs auch a.,.b und d.,.b; ſondern daſs beides möglich ſei.

Dieſe Aufgabe muſs alſo durch die genauere Betrachtung der Natur der Zahlen, insbeſondere der gebrochnen gelöſst werden, und es iſt alſo dieſe Aufgabe folgende:

Ob, wenn a.,.d, ſowohl a.,.b als auch a.?.b und d.?.b ſein könne, und unter welchen Beſtimmungen das eine oder das andere ſei.

Oder mit andern Worten:

Ob die mittlere Proportionalgröſse, zu denen beiden, zwiſchen denen ſie es iſt, commenſurabel oder incommenſurabel ſein könne, wenn dieſe beiden doch gegen einander commenſurabel ſind.

Soviel iſt indeſs ſchon hier darüber gewiſs:

Wenn a.,.b ſo iſt auch d.,.b; und wenn a.?.b, ſo iſt auch d.?.b.

Denn a und d ſind Vielheiten derſelben Einheit, es gilt alſo hier S. 165.

Man nennt die Aufgabe b zu a und d zu finden auch: *zu a und b die mittlere Proportionalgröſse zu finden.*

Iſt endlich von den 3 Gliedern a, b, d; d und b als Hinterglied im erſten Satze gegeben, ſo iſt

b auch

b auch als Vorderglied im andern Satze, alſo auch a gegeben.

Immer alſo iſt in ſtetiger Proportion durch 2 Glieder das *dritte beſtimmt;* ſollte es incommenſurabel ſein, ſo könnte es freilich in Zahlen nie erreicht werden; dennoch aber *iſt* es *an ſich* nur *ein* individuell beſtimmtes.

So wie zu b, d gefunden wird, ſo daſs ſich a..b = b..d verhält, ſo hindert nichts (8) auch von d aus ein neues Glied e zu finden, ſo daſs a..b = b..d = b..e; ingleichen von e ein neues f, g....n; ſo daſs alle zu dem nächſten Gliede in derſelben Richtung genommen, in dem gleichen Verhältniſſe wären (in proportione continua). Hierdurch *iſt* an ſich eine abſolut unendliche Reihe (ſeries infinita) ſolcher Glieder gegeben, welche daher auch eine *ſtetige Fortſchreitung* nach demſelben Verhältniſſe (continua Progreſſio ejusdem rationis) genannt werden kann.

Dieſs iſt genau weiter zu betrachten, wenn zuförderſt die Betrachtung der zweiſätzigen Proportion, ſo weit hier möglich, vollendet ſein wird. Zuförderſt ſind die Veränderungen der Glieder jeder Proportion *im allgemeinen* zu betrachten.

26.

Die Veränderungen der Glieder einer Proportion geſchehen entweder durch bloſse Verſetzung (permutando per

per mutationes formales), oder durch wirkliche Gröſsenbeſtimmung (per mutationes materiales) derſelben.

Bei dem Reſultate aller möglichen Veränderungen ſind folgende drei Fälle möglich: es bleibt dieſelbe Proportion, z. B. a..b = c..d = an..bn = cn..dn; oder es bleibt zwar Proportion, aber eine eines anderen Verhältniſſes, z. B. a..b = c..d $\gtrless$ a..c = b..d, wenn c $\gtrless$ a; oder die Proportion wird ganz vernichtet, z. B. wenn a..b = c..d ſo iſt nicht a..b = d..c (wenn a $\gtrless$ b).

Wir betrachten zuerſt die

1) *Veränderungen der Proportion durch bloſe Verſetzung.* Es ſind hierbei folgende 24 Fälle:

1)	abcd	13)	cabd, *
2)	abdc, *	14)	cadb, β
3)	acbd, β	15)	cbad, *
4)	adbc, *	16)	cdab, γ
5)	acdb, *	17)	cbda, *
6)	adcb, *	18)	cdba, *
7)	bacd, *	19)	dabc, *
8)	badc, α	20)	dacb, *
9)	bcad, *	21)	dbac, *
10)	bdac, β	22)	dcab, *
11)	bcda, *	23)	dbca, β
12)	bdca, *	24)	dcba, β

(α bedeutet die gleiche Proportion, nur umgekehrt; β eine andere; γ, blos Verſetzung der Sätze.)

a) Wenn blos die Sätze verſetzt werden, ſo bleibt die Proportion unverändert; denn beide Sätze ſind in gleichem Verh. ihrer Glieder
Alſo iſt c..d = a..b.

b) Wenn

b) Wenn homologe Glieder in derſelben Ordnung der Sätze genommen werden, ſo erhält man wieder eine Proportion, wiewohl, wenn a $\gtrless$ c, eine andere (23).

Alſo iſt a..c = b..d; alſo auch; nach a)
b..d = a..c.

c) Wenn man die Ordnung der Glieder umgekehrt, ſo erhält man die Proportion des umgekehrten Verhältniſſes (23).

Alſo iſt b..a = d..c; ferner a)
d..c = b..a; ferner b)
c..a = d..b; endlich b)
d..b = a..b.

d) Wenn man aber anomologe Glieder aus verſchiedenen Sätzen, mit oder ohne Ordnung der Sätze nimmt, ſo wird die Proportion geſtört.

Denn anomologe Glieder verſchiedener Sätze ſind nicht gleiche Vielheiten von einander, laut des allgemeinen Ausdruckes jeder Proportion
a..av = au..auv.
welches doch zur Proportionalität erfordert wird (23).

Hierdurch fallen aus den genannten 24 Fällen die mit * bezeichneten 16 weg; und bleiben alſo nur die unter a, b, c, genannten übrig:

Ohne Verſetzung —	*mit Verſetzung der Sätze*
a..b = c..d	c..d = a..b
a..c = b..d	b..d = a..c
c..a = d..b	d..b = c..a
b..a = d..c	d..c = b..a.

2) *Die*

2) *Die Veränderungen der Proportion durch Gröſsenbeſtimmung ihrer Glieder.*

A) *Wird ein Glied verändert*, ſo wird auf jeden Fall die Proportion geſtört; denn das dem andern gleiche Verhältniſs desjenigen Satzes, deſſen eines Glied $>$ oder $<$ wird, wird ein anderes (22), alſo dem anderen ungleiches.

B) *Wenn aber 2 Glieder der Proportion verändert werden*, ſo ſind dieſe entweder Glieder deſſelben Satzes, oder aus verſchiedenen Sätzen;

a) *ſind beide aus demſelben Satze:* ſo kann nur dann Proportionalität bleiben, wenn das Verhältniſs durch die Veränderungen ungeſtört bleibt; welche Fälle ſchon in 22 alle dargeſtellt ſind. Daher auch die neue Proportionalität die hierdurch entſteht die gleiche iſt.

Die Proportion, deren Glieder verändert werden, nenne ich *Grundproportion*, und bezeichne ſie durch: a..b = c..d, oder durch GP.; die durch die Veränderungen entſtandene aber die *abgeleitete Proportion*, und bezeichne ſie durch die Veränderungen an a..b = c..d ſelbſt, oder durch AP. Folgender Ausdruck AP. = GP. heiſst: *die AP. iſt dieſelbe als GP.;* und: AP. $\gtrless$ GP. heiſst: *die AP iſt gröſser oder kleiner als die GP.* Die 4 Glieder, wie ſie nach der Veränderung ſind (das Reſultat der Veränderung) will ich durch R. andeuten.

b) *beide zu verändernde Glieder ſind aus verſchiedenen Sätzen*, dann ſind ſie entweder homolog (a, c; b, d) oder anomolog (a, d; b, c). Es ſind alſo

α) *beide homolog*, alſo a und c, b und d.

aa) *a und c werden verändert;* so gilt hierbei der allgemeine Satz: wenn durch die Veränderung von a dieselbe Vielheit zu Stande gebracht wird als von c, so wird zwar GP. verändert, aber es entspringt eine AP.

Denn verändert muss GP allemal hiebei werden, weil in beiden Sätzen nur *ein* Glied verändert wird (22). Wird aber von a dieselbe Vielheit α zu Stande gebracht, als von c die Vielheit γ, so ist auch α von b dieselbe Vielheit, als γ von d ist; also $\alpha..b = \gamma..d$. Denn die GP. $a..b = c..d$ ist gleich $vb..b = vd..d$. Nehme ich also von vb und vd die gleiche Vielheit, also $uvb..b$ und $uvd..d$; so ist $uvb..b = uvd..d$.

Z.B. für $1..2 = 3..6$ setze $2.1..2 = 2.3..6 = 2..2 = 3..6$.

$\alpha\alpha$) a und c werden durch Vermehrung verändert (α sei das zu a Gesetzte und γ das zu c Gesetzte), so ist $\alpha..\gamma =$ oder $\gtrless$ a..c. Ist $\alpha..\gamma = a..c$, so entsteht wieder eine AP, die jedoch $\gtrless$ GP. Denn wenn $\alpha..\gamma = a..c$, so ist auch $\alpha..a = \gamma..c$, auch $a+\alpha..c+\gamma = a..c$ (22).

Da nun $a = vb$, auch $c = vd$, so ist auch $vb+\alpha..vd+\gamma = vb..vd$; also auch $vb+\alpha$ dieselbe Vielheit von vb, als $vd+\gamma$ von vd; und da vb von b dieselbe Vielheit von b als vd die Vielheit von d ist, so folgt nach obstehendem Beweisse, dass auch $vb+\alpha..b = vd+\gamma..d$ ist; dass also R eine AP ist; jedoch eine ungleiche mit der GP; denn da $GP = a..b = c..d$ ist, oder auch $= vb..b = vd..d$; aber $vb+\alpha > vb$, und $vd+\gamma > vd$; so folgt

auch,

auch, dafs die AP. eines gröfseren Verhältnisses als die GP. ist.

Setze z. B. in $2..3 = 6..9$, zu 2 und zu 6 2 Gröfsen hinzu, welche sich verhalten wie $2..6 = 1..3$, z. B. $4..12$, so erhältst du eine neue, aber andere Prop. nehmlich $2+4..3 = 6+12..9 = 6..3 = 18..9$.

Es gilt aber diess ganz im allgemeinen, α mag zu a und γ zu c commensurabel oder incommens. sein, wenn nur $\alpha..\gamma = a..c$. Auch kann GP eine endliche oder unendliche sein.

Ist aber $\alpha..\gamma \gtrless a..c$, so ist auch R keine Prop.; und zwar wenn $\alpha..\gamma > a..c$, so ist auch $a+\alpha..b > c+\gamma..d$ und umgekehrt, wenn $\alpha..\gamma < a..c$ so ist auch $a+\alpha..b < c+\gamma..d$; z. B. wenn für $1..2 = 3..6$ gesetzt wird $1+4..2$ und $3+7..6$, $= 5..2$ und $10..6$, so ist $4..7 > 1..3$ (weil $4..12 = 1..3$) also $5..2 > 10..6$.

ββ) beide, a und c werden durch Verminderung verändert, das ist von a wird α von c aber γ genommen, so dafs $a > \alpha$ und $c > \gamma$. So ist $\alpha..\gamma =$ oder $\gtrless a..c$. Ist nun $\alpha..\gamma = a..c$, so ist auch R d. i. $a-\alpha..b = c-\gamma..d$ eine Proportion, jedoch eine andere als $a..b = c..d$. Denn weil $\alpha..\gamma = a..c$, so ist auch $\alpha..a = \gamma..c$, also α von a dasselbe Vielfache als γ von c ist; also ist auch (22) $a-\alpha..c-\gamma = a..c$. Nun ist $a..c = b..d$; also auch $a-\alpha..c-\gamma = b..d$; also auch (23, S. 187, 3) $a-\alpha..b = c-\gamma..d$.

Z. B.

Z. B. für 2..3 = 6..9 setze 2 — 1..3 und 6 — 3..9; so verhält sich 1..3 = 2..6, also ist auch 2 — 1..3 = 6 — 3..9 = 1..3 = 3..9. Oder allgemein in Linien Fig. 53, wenn a..b = c..d, und α..β = a..c, so ist auch a — α..b = c — γ..d; a und c mögen .,. oder .?. sein.

Weil hierbei a und c, als Vorderglieder kleiner werden, so ist AP < GP.

Ist aber α..γ ≷ a..c, so ist auch a — α..c — γ ≷ a..c, also auch, a — α..c — γ ≷ b..d (= a..c). Also auch a — α..b ≷ c — γ..d. Und zwar wenn α..γ > a..c so ist a — α..b < c — γ..d; wenn aber a..γ < a..c so ist umgekehrt a — α..b > c — γ..d (17b).

Hiernach sind alle Fälle zu beurtheilen, wo beide a und c durch Addition und Subtraction von Grössen mit gleichen oder ungleichen Zeichen verändert werden; welche Fälle alle aufzuführen, hier der Raum nicht gestattet.

$\gamma\gamma$) a und c werden beide durch Multiplication verändert (es heisse wieder die Vervielfachungszahl zu a α, die zu c, γ), so ist entweder α = oder ≷ γ. Ist α = γ, so entsteht Proportion aber eine andere; denn da α = v auch γ = v, so ist aα..b = cγ..d == av..b = cv..d, oder weil a..b = c..d == bn..b = dn..d, so ist auch aα..b = cγ..d == bnv..b = dnv..d; welches, weil die Vorderglieder von den Hintergliedern die gleichen Vielheiten sind, eine richtige Proportion ist. Ist nun α = γ = v < 1, so ist auch bn > bnv und eben so dn > dnv, also

alſo auch $a\alpha..b < a..b$, und $c\gamma..d < c..d$; alſo AP. eines kleineren Verhältniſſes, als GP. Iſt aber $\alpha = \gamma = v > 1$ ſo iſt umgekehrt AP eines $>$ Verh. als GP.

Z. B. in $1..2 = 3..6$ ſetze $\alpha = \gamma = 3$ ſo entſteht eine AP, und zwar weil $3 > 1$ eine eines $>$ Verhältniſſes, d. i. $3..2 = 9..6$.

Setze aber in $3..6 = 6..12$, $\alpha = \gamma = \frac{1}{3}$, ſo iſt die AP. $3.\frac{1}{3}..6 = 6.\frac{1}{3}..12 = 1..6 = 2..12 < 3..6 = 6..12$.

Sind aber α und γ ungleiche Vielheiten, ſo entſtehen auch 2 ungleiche Verhältniſſe, und zwar wenn $\alpha > \gamma$, ſo iſt das erſte Verhältniſs in R $>$ als das zweite; und umgekehrt: wenn $\alpha < \gamma$, ſo iſt auch $a\alpha..b < c\gamma..d$.

$\delta\delta$) beide, a und c werden durch Diviſion verändert, ſo entſteht eine neue Proportion, die aber eine andere, als die GP. iſt, wenn $\alpha = \gamma$, aber gar keine, wenn $\alpha \gtrless \gamma$. Am kürzeſten beweiſe ich dieſs ſo: jede Diviſion läſst ſich ohne Veränderung des Reſultats, als Multiplication mit der umgekehrten Vielheit anſehen. Wenn demnach a mit α und c mit γ dividirt wird, und $\alpha = \gamma$ ſo ſind auch die umgekehrten Vielheiten α und γ gleich, alſo auch, nach $\gamma\gamma$), $a:\alpha..b = c:\gamma..d = a.\frac{1}{\alpha}..b = c.\frac{1}{\gamma}..d$ (172). Iſt aber $\alpha \gtrless \gamma$ ſo ſind auch die umgekehrten Vielheiten ungleich, alſo auch nach $\beta\beta$) R keine Proportion. Und zwar wenn in $\alpha = \gamma$ beide > 1 ſind, ſo iſt auch $a:\alpha..b\ (= c:\gamma..d) < a..b = c..d$. Wenn aber dabei $\alpha >$ oder $< \gamma$ alſo die Pro-

por-

portion geſtört wird, ſo iſt umgekehrt $a:\alpha..b$ $<$ oder $>$ $c:\gamma..d$.

Der Kürze wegen ſoll: $a <> b$ heiſsen: *a gröſser oder kleiner als b*, und: $a <> b$: *a kleiner oder gröſser als b*.

εε) a wird durch Vermehrung, c aber durch Verminderung verändert oder umgekehrt: ſo kann R keine Proportion ſein, weil dadurch ein Vorderglied gröſser das andere kleiner wird.

ζζ) a wird durch Vermehrung oder Verminderung, c aber durch Multiplication oder Diviſion verändert oder umgekehrt: ſo entſteht in allen denen Fällen eine AP.; wo die Vermehrung und Verminderung das dadurch veränderte Glied zu derſelben Vielheit erhebt, als das andere durch Multiplication oder Diviſion auch erhoben wird; widrigenfalls wird die Prop. vernichtet.

Z. B. da $2..3 = 6..9$ ſo iſt $2-1..3$ auch $= 6.\frac{1}{2}..9 == 1..3 = 3..9$ weil auch $2-1$ von $2 = \frac{1}{2}$.

ηη) a wird durch Multiplication, c aber durch Diviſion verändert, oder umgekehrt: ſo entſteht Proportionalität wenn ſich der Multiplicator und Diviſor wie umgekehrte Vielheiten verhalten (16, 17), widrigenfalls wird die Proportion geſtört. Alſo allgemein: $a.\frac{n}{m}..b = c:\frac{m}{n}..d$; z. B. da $2..3 = 8..12$ ſo iſt auch $2:\frac{1}{2}..3 = 8.2..12 == 4..3 = 16..12$. Auch umgekehrt allgemein: $a:\frac{n}{m}..b = c.\frac{m}{n}..d$.

bb)

bb) *b und d werden verändert:* so gilt auch hier alles das, was von den Veränderungen von a und c ist bewiesen worden; nur dass, wenn eine AP. entsteht, diese, weil hier die Hinterglieder verändert werden, dann $> <$ ist, wenn die bei a und c entstehende unter gleichen Veränderungen $< >$ ist (17b).

Z. B. aus $1..2 = 4..8$, wird durch Multipl. von 1 und 4 durch 3, $3..2 = 12..8 > 1..2 = 4..8$; multiplicirt man aber 3 und 8 beide durch 3, so erhält man $1..6 = 4..24 < 1..2 = 4..8$.

β) *es werden anomologe Glieder verschiedener Sätze verändert;* also a und d, oder b und c. Auch in diesem Falle kann die AP, wo eine entsteht nicht = der GP sein, weil nur ein Glied in jedem Satze verändert wird.

aa) a und d;

αα) *beide durch Vermehrung;* also wird aus $a..b = c..d$ allgemein: $a + p..b = c..d + q$, also das erste Verhältniss $>$, das andere $<$ als die beiden gleichen Grundverhältnisse $a..b = c..d$; also ist $a + p..b > c..d + q$.

ββ) *beide durch Verminderung;* also aus $a..b = c..d$ allgemein: $a - p..b = c..d - q$; demnach wird $a - p..b <$ und $c..d - q >$ $a..b = c..d$; also auch $a - p..b < c..d - q$.

γγ) *beide durch Multiplication.* Sind beide Multiplicatoren, α und δ, > 1, so werden dadurch beide Glieder a und d vergrössert, also das

das erste $>$ als das zweite, das ist allgemein an..b $>$ c..dn; sind aber beide $<$ 1, so werden beide a und d kleiner, also das erste $<$ als das zweite; z. B. aus 3..2 = 6..4 werde $3 \cdot \frac{1}{3}$..2, und $6..4 \cdot \frac{1}{2}$ = 1..2 und 6..2; so ist 1..2 $<$ 6..2. Wenn aber von α und δ eins $>$ das andere aber $<$ 1, so wird auch von a und d eins $>$ das andere $<$; wenn aber 2 gleiche Verhältnisse so verändert werden, dass im ersten das Vorderglied $>$ das Vorderglied aber im anderen $<$ wird, so werden die beiden entstehenden Verhältnisse beide grösser als das GV; also können sie auch wieder gleich werden, wenn das eine *eben so* vergrösert wird als das andere $<$ wird; diess aber geschieht wenn man a mit der umgekehrten Zahl multiplicirt von der, womit d multiplicirt wird. Ich behaupte also allgemein:

$$a \cdot \frac{u}{v} .. b = c .. d \cdot \frac{v}{u}$$

für unendlichen und endlichen Multiplicator.

Denn $a \cdot \frac{u}{v}$ ist gegen b $\frac{u}{v}$ - theilmal so beträchtlich als a..b (17b, S. 111.); ferner in $c..d \cdot \frac{v}{u}$ ist auch c gegen d das $\frac{u}{v}$ - theilfache als c gegen d ist (S. 111, 3).

Z. B. für 2..5 = 4..10 setze $2 \cdot \frac{1}{2}$..5 = 4..10.2 = 1..5 = 4..20; welches eine richtige Prop. ist, aber $<$ 2..5 = 4..10.

δδ) beide, a und d, durch Division; so kann aus gleichen Gründen, wie unter (β, γγ) dem

 letzten

letzten Falle, nur dann Proportion bleiben, wenn a mit der entgegengesetzten Vielheit dividirt wird, als d; alſo allgemein:

$$a : \frac{u}{v} .. b = c .. d : \frac{v}{u}.$$

εε) *das eine Glied, a oder d, durch Vermehrung, das andere durch Verminderung.* So werden dadurch beide Verhältniſſe zugleich gröſser oder kleiner; wenn daher ſie nach Proportion > oder < werden, ſo kann hieraus wieder Prop. entſtehen. Dieſs letztere iſt aber nur der Fall, wenn ſich das neuentſtehende Vorderglied ($a \mp \alpha$) zum vorigen Vordergliede (a) verhält, wie ſich das vorige Hinterglied (d) zum neuentſtehenden Hintergliede ($d \pm \delta$) verhält. Alſo wenn

$$a \mp a .. a = d .. d \pm \delta, \text{ ſo iſt auch}$$

$$a \mp a .. b = c .. d \pm \delta.$$

Denn es iſt hierbei $d \pm \delta$ die umgekehrte Vielheit von d, als $a \mp a$ von a iſt, alſo nach αα) R eine Proportion: z. B. ſetze für $3 .. 6 = 4 .. 8$, $3 - 2 .. 6 = 4 : 8 + 16$, ſo erhältſt du $1 .. 6 = 8 .. 24$, welches eine Proport. iſt, weil ſich verhält $1 .. 3 = 8 .. 24$.

ζζ) a und d werden beide verändert, *a durch Multiplication, d durch Diviſion;* ſo entſteht eine AP., wenn der Multiplicator für a = dem Diviſor für b; alſo allgemein $a . \frac{u}{v} .. b = c .. d : \frac{u}{v}$. Denn durch die Multiplication

wird

wird das Verhältniſs a..b zu dem $\frac{u}{v}$ ſo groſsen Verhältniſs gemacht, umgekehrt das Verhältniſs von c..d durch Diviſion mit $\frac{u}{v}$ in d auch zu dem $\frac{u}{v}$ - fachen gemacht. (S. 111).

Z. B. ſetze in 1..2 = 3..6, 1.3..2 = 3..6:3, ſo kommt 3..2 = 3..2; denn aus 1..2 wird in 3..2 das dreimal ſo groſse Verhältniſs des Vorderglieds zum Hintergliede; und aus 3..6 wird auch umgekehrt, dadurch, daſs von 6 nur $\frac{1}{3}$ genommen wird, das dreimal ſo groſse Verhältniſs; alſo muſs auch 3..2 = 3..2 ſein.

Hieraus ergiebt ſich auch, daſs, wenn dieſe beiden Zahlen der Veränderung ungleich ſind, auch keine Proportion entſtehen könne (S. 111).

ηη) *a wird durch Diviſion und d durch Multiplication verändert*, ſo gilt aus gleichen Gründen gleiches, als unter ζζ).

ϑϑ) Hieraus laſſen ſich auch alle Fälle beſtimmen, wo von a und d, das eine Vermehrung oder Verminderung, das andere durch Multiplication oder Diviſion verändert wird.

bb) *b und c werden* verändert; ſo ſind mit veränderter Beziehung hier dieſelben Beſtimmungen als unter aa); z. B. wenn beide mit entgegengeſetzten Vielheiten multiplicirt oder dividirt werden,

O 2 bleibt

bleibt Proportion, d. i. für $1..2 = 3..6$ ſetze $1..2.3 = 3.\frac{1}{3}..6$; ſo kommt $1..6 = 1..6$. Oder wenn das eine Glied mit derſelben Zahl dividirt oder multiplicirt wird, mit welcher auch das andere multiplicirt oder dividirt wird, ſo entſteht auch Proportionalität, *jedoch immer eine andere, als GP.*, z. B. für $2..5 = 50..125$, ſetze $2..5.5 = 50:5..125$, ſo kommt $2..25 = 10..125$.

C) *Drei Glieder werden verändert.* Wenn auch bei dieſen Veränderungen Proportion entſteht, ſo kann es doch nicht die gleiche ſein, als die GP., denn in dem einen Satze wird nur ein Glied verändert, alſo das neue Verh. in dieſem Satze > oder < als das vorige. Soll alſo eine AP entſtehen, ſo müſſen diejenigen 2 Glieder von den zu verändernden dreien, welche deſſelben Satzes ſind, ſo verändert werden, daſs das Verhältniſs dieſes Satzes ein anderes wird; wonach dann auch die Veränderung des dritten Gliedes eingerichtet werden muſs. Die 3 zu verändernden Glieder können alſo ſein a, b, c; a, b, d; a, c, d; b, c, d. Die dieſem Grundriſſe geſetzten Grenzen verbieten, die einzelnen Fälle hier anzuführen, da ſie ohnehin Jeder zur Uibung, nach dem vorigen, ſich ſelbſt vorbilden kann. Ich führe nur einige Beiſpiele an; es werde z. B. a, b, c verändert; a werde multiplicirt mit $\frac{n}{m}$, b mit $\frac{o}{p}$; ſo hat man im erſten Satze $a.\frac{n}{m}..b.\frac{o}{p}$, welches Verhältniſs (S. 111.) das $\left(\frac{n}{m}.\frac{p}{o}\right)$ - theilfache von a..b iſt; wenn alſo c mit $\frac{n}{m}.\frac{p}{o}$ multiplicirt wird, ſo muſs eine AP kommen; alſo $a.\frac{n}{m}..b.\frac{o}{p} = c.\frac{n}{m}.\frac{p}{o}..d$; z. B. in

Zahlen,

Zahlen, ſetze für $2..3 = 4..6$, $2.3..3.2 = 4.3.\frac{1}{2}..6 = 6..6 = 6..6$. Oder für $1..5 = 2..10$, $1.2..5.\frac{1}{5} = 2.2.5..10 = 2..1 = 20..10$.

D) *Vier Glieder werden verändert;* dieſe Veränderungen laſſen alle 3 Fälle des Reſultats zu, daſs die gleiche Proportionalität bleibe, daſs eine andere Proportionalität entſtehe, auch daſs die Proportionalität ganz aufgehoben werde. Wir betrachten

α) *Veränderungen von 4 Gliedern, wo AP = der GP.* Hierbei müſſen je 2 Glieder deſſelben Satzes ſo verändert werden, daſs jeder Satz ſein Verhältniſs beibehält, alſo

aa) alle 4 Glieder mit derſelben Zahl multiplicirt oder dividirt werden (22); im allgemeinen: $an..bn = cn..dn$, und $a:n..b:n = c:n..d:n$; z. B. $1..2 = 3..6 = 1.3..2.3 = 3.3..6.3 = 3..6 = 9..18$.

bb) je 2 Glieder deſſelben Satzes durch dieſelbe Zahl multiplicirt oder dividirt werden (22), alſo allgemein: $an..bn = cm..dm$; $a:n..b:n = c:m..d:m$; $a:n..b:n = cm..dm$; $an..bn = c:m..d:m$ (wobei n und m alle mögliche ganze und gebrochne, endliche und unendliche Vielheiten bedeuten.).

cc) zu allen 4 Gliedern Stücken geſetzt werden, welche ſich zu den vermehrten Gliede auf gleiche Weiſe verhalten; alſo allgemein wenn $a..\alpha = b..\beta = c..\gamma = d..\delta$ ſo iſt: $(a+\alpha..b+\beta = c+\gamma..d+\delta) = (a..b = c..d)$ z. B. in $3..6 = 9..18$ ſetze $3+1..6+2 = 9+3..18+6$; ſo iſt dieſe $= (4..8 =$

12..24) = (3..6 = 9..18). Wenn aber a..α = b..β = c..γ = d..δ, so ist auch (α.. = γ..δ) = (a..b = c..d); also entsteht allemal wieder dieselbe Proportion, wenn man gleichliegende Glieder 2er gleicher Proportionen addirt z. B.

1..2 = 3..6
4..8 = 1..2

5..10 = 4..8.

dd) Auch können die Glieder des einen Satzes durch verhältnissmäſsige Vermehrung oder Verminderung, und die Glieder des andern Satzes durch Multiplication oder Division mit gleichen Vielheiten verändert werden; also ist, wenn α..a = β..b,

(a..b = c..d) = (a + α..b + β = cn..dn)
(a..b = c..d) = (a − α..b − β = c:n..d:n).

u. dergl. mehrere Fälle.

β) *Veränderungen aller vier Glieder zu ungleicher Proportion mit GP.* Immer ist dieſs zuförderst der Fall, wenn sowohl a und c, als auch a und d so verändert werden, daſs durch jede dieser beiden Veränderungen für sich eine AP. entstehen würde. Wer aber die Fälle der Veränderungen von a und c, auch b und d sich bekannt gemacht hat, der wird auch die hiehergehörigen Fälle sich combinatorisch bilden können; ich führe daher nur die obersten davon an:

aa) Wenn a und c, beide mit derselben Zahl, auch b und d beide mit derselben Zahl multiplicirt oder dividirt werden, so zwar, daſs die Zahl für a und c eine andere als die für b und

b und d ist. Also entstehen aus $a..b = c..d$ folgende Proportionen: $an..bm = cn..dm$; $an..b:m = cn..d:m$; $a:n..bm = c:n..dm$; $a:n..b:m = c:n..d:m$ (wo $n \gtrless m$, und beide jede, endliche und unendliche, Vielheiten bedeuten).

Denn (a . oder : n)..b = (c . oder : n)..d. Und a..(b . oder : m) = c..(d . oder : m) (B, b, α).

Z. B. aus $2..5 = 6..15$ bilde $2.3..5:\frac{1}{2} = 6.3..15:\frac{1}{2} = 6..10 = 18..30$.

bb) Wenn von $a..b = c..d$ gleichliegende Glieder mit gleichliegenden Gliedern einer anderen Proportion des gleichen oder eines andern Verhältnisses multiplicirt werden.

Also allgemein, wenn $a..b = c..d$, auch $\alpha..\beta = \gamma..\delta$ (wobei $a..b =$ oder $\gtrless \alpha..\beta$ sein kann); so ist auch: $a\alpha..b\beta = c\gamma..d\delta$.

Denn weil $\alpha..\beta = \gamma..\delta$; so ist auch $\alpha..\gamma = \beta..\delta$ (23, 4); also kann zwar, wenn $\alpha \gtrless \gamma$ (also auch (23) $\beta \gtrless \delta$) folgendes keine Proportion sein

$$a\alpha..b \gtrless c\gamma..d,$$

denn wenn $\gamma \gtrless \alpha$ so ist auch (B, bα) $a\alpha..b \gtrless c\gamma..d$. Auch folgendes ist, aus gleichem Grunde, keine Proportion

$$a..b\beta \gtrless c..d\delta.$$

Weil aber γ das Ebensovielfache von α als δ das Vielfache von d ist (indem $\alpha..\gamma = \beta..\delta$), so muss folgendes eine Proportion sein

$$a\alpha..b\beta = c\gamma..d\delta;$$

denn

denn auf dieselbe Art, wie das Verhältniss a..c hierin verändert wird, wird auch das Verhältniss b..d verändert, also ist $a\alpha..c\gamma = b\beta..d\delta$, also auch $a\alpha..b\beta = c\gamma..d\delta$ (23, 4).

Oder auf folgende Art:

Wenn $\alpha >< \beta$, also auch $\gamma >< \delta$, so wird sowohl a..b, als c..d gestört, aber beide ganz auf die gleiche Art; weil β ein so Vielfaches von α, als δ ein Vielfaches von γ; also muss auch $a\alpha..b\beta = c\gamma..d\delta$ sein.

Oder vermittelter Weise so:

Wenn a..b = c..d, so kann man dafür (23) setzen a..an = c..cn, und für $\alpha..\beta = \gamma..\delta$, ebenso $\alpha..\alpha v = \gamma..\gamma v$; wenn man also die gleichliegenden Glieder in einander multiplicirt (*producirt*), so erhält man

$$a\alpha..an\alpha v = c\gamma..cn\gamma v:$$

hier ist also das Product von den beiden äussersten Gliedern dem Producte der innern gleich; denn, da auf die Ordnung der Factoren nichts ankommt (S. 188.), so ist $a\alpha cn\gamma v = an\alpha vc\gamma$.

Da nun diess (23, S. 188.) wesentlicher Character einer jeden Proportion ist, so folgt dass eben diess eine richtige Proportion sein müsse.

Wenn die andere Proportion auch die erste selbst, in demselben, oder in einem andern Ausdrucke ist: so gilt das gleiche; weil es hier ganz im allg. ist erwiesen worden; z. B. da 1..3 = 2..6, so ist auch 1.1..3.3 = 2.2..6.6 = 1..9 = 4..36. Uiberhaupt also, wenn a..b = c..d, so ist auch aa..bb = cc..dd.

Auch

Auch ist nicht zu vergessen, dass diess von endlichen und unendlichen Proportionen erwiesen ist.

cc) Wenn gleichliegende Glieder einer Proportion mit gleichliegenden Gliedern einer andern Proportion dividirt werden, so entspringt hieraus wieder Proportion jedoch allemal eine andere.

Denn man betrachte (17a) die Division als Multiplication mit der entgegengesetzt. Vielheit und schliesse nach dem letzten Falle aa).

Es ist also wenn $a..b = c..d$ und $\alpha..\beta = \gamma..\delta$

$$a:\alpha..b:\beta = c:\gamma..d:\delta.$$

Also auch

$$a:a..b:b = c:c..d:d =$$
$$1..1 = 1..1.$$

dd) Wenn $a..b = c..d$ und $\alpha..\beta = \gamma..\delta$, so ist auch $a\alpha..b\beta = c:\delta..d:\gamma$ oder $a:\beta..b:\alpha = c\gamma..d\delta$.

Denn man erhält aus irgend einem Grundverhältnisse $a..b$ dasselbe abgeleitete Verhältniss durch die Multiplication mit α und β (also $a\alpha..b\beta$), als durch Division mit β und α (also $\alpha:\beta..b:\alpha$) (S. 111.) (z. B. aus $9..4$ wird $9.2..4.3 = 9:3..4:2$; das ist $18..12 = 3..2$). Da nun, wenn $a..b = c..d$, und $\alpha..\beta = \gamma..\delta$ auch $a\alpha..b\beta = c\gamma..d\delta$, und $c\gamma..d\delta = c:\delta..d:\gamma$, so ist auch $a\alpha..b\beta = c:\delta..\delta:\gamma$. Z. B. da $2..3 = 10..15$, auch $10..4$

$= 5$

$= 5 .. 2$ ſo iſt auch $2 . 10 .. 3 . 4 = 10 : 2 .. 15 : 5 .. 12$ $(= 5 .. 5.)$

Noch einen Fall ſiehe weiter unten in §. 29.

β) ſo daſs die Proportion ganz geſtört wird. Dieſs iſt überall der Fall, wenn a..b anders umgebildet wird, als c..d. Ich führe nur einen Fall an, da dieſer Fälle eine unendliche Menge iſt, und auch die oberſten nur anzuführen, für hier zu weitläuftig iſt.

Wenn $a .. b = c .. d$, auch $\alpha .. \beta = \gamma .. \delta$, aber $a .. c \gtrless \alpha .. \gamma$, alſo auch $b .. d \gtrless \beta .. \delta$, ſo iſt auch $a \mp \alpha .. b \mp \beta \gtrless c \mp \gamma .. d \mp \delta$; z. B. $1 .. 2 = 3 .. 6$, auch $3 .. 5 = 6 .. 10$; aber $1 .. 3 \gtrless 3 .. 6$, daher auch $1 + 3 .. 2 + 5 \gtrless 3 + 6 .. 6 + 10$, d. i. $4 .. 7 \gtrless 9 .. 16$.

Bei den Veränderungen der Proportionen können nun auch die Glieder der Grundproportion ſelbſt als verändernde Gröſsen genommen werden; und es können auf dieſe Art nach den ſo eben erklärten Geſetzen aus jeder Proportion unzählige andere, entweder blos anders geſtaltete, oder in ihrem Verhältniſſe verſchiedene Proportionen gebildet werden, welche Mannigfaltigkeit noch durch die Verſetzung der Glieder vergröſsert wird. Ich begnüge mich hiervon nur die oberſten Fälle anzuführen.

A) *Zwei Glieder deſſelben Satzes werden verändert,* ſo entſpringt hieraus, wenn überhaupt, allemal die gleiche Proportion.

a) *Durch Addition und Subtraction*

$a+a..b+b=c..d$ $a+a+c..b+b+d=c..d$
$a-a..b-b=c..d$ $a-a+c..b-b+d=c..d$
$a+c..b+d=c..d$ $a+a-c..b+b-d=c..d$
$a-c..b-d=c..d$ $a-a-c..b-b-d=c..d$

u. f. f. ins Unendliche.

b) *Durch Multiplication*

$$aa..ab=c..d$$
$$ab..bb=c..d$$
$$ac..bc=c..d$$
$$ad..bd=c..d$$

$$a.\frac{a}{b}..b.\frac{a}{b}=c..d, \text{ oder: } \frac{aa}{b}..a=c..d$$

$$a.\frac{b}{a}..b.\frac{b}{a}=c..d, \text{ oder: } b..\frac{bb}{a}=c..d$$

$$a.\frac{a}{c}..b.\frac{a}{c}=c..d, \text{ oder: } \frac{aa}{c}..\frac{ba}{c}=c..d$$

$$a.\frac{c}{a}..b.\frac{c}{a}=c..d, \text{ oder: } c..\frac{bc}{a}=c..d$$

und fo fort durch Multiplication mit

$$\frac{a}{d}, \frac{d}{a}, \frac{b}{c}, \frac{c}{b}, \frac{c}{d}, \frac{d}{c}, \frac{b}{d}, \frac{d}{b}.$$

c) *Durch Divifion*

$a:a..b:a=c..d$ $a:c..b:c=c..d$
$a:b..b:b=c..d$ $a:d..b:d=c..d$

$$a:\frac{a}{b}..b:\frac{a}{b}=c..d,$$ und fo weiter wie unter b).

d) Werden hiebei mehrere Glieder zugleich als Multiplicatoren und Diviforen angenommen, fo entfpringen hieraus unzählige Fälle folgender Art:

$$abcd..bbcd..c..d$$
$$a:bcd..b:bcd=c..d$$
$$ab:cd..bb:cd=c..d$$

a.(a+b)

$$a.(a+b)\,..\,b.(a+b) = c\,..\,d$$
$$a.(a-b)\,..\,b.(a-b) = c\,..\,d$$
$$a:(a-b+c-d)\,..\,b:(a-b+c-d) = c\,..\,d$$
$$(a:b)+c\,..\,(b:b)+d = (a:b)+c\,..\,1+d = c\,..\,d$$
$$a.(a+b-c)-c\,..\,b.(a+b-c)-d = c\,..\,d$$

u. ſ. f. ins Unendliche.

B) *Zwei Glieder verſchiedener Sätze werden verändert*, ſo kann hier zwar Proportionalität, immer aber nur Prop. eines verſch. Verhältniſſes mit GP. entſtehen:

1) *a und c*

a) *durch Addition oder Subtraction*

$a+a\,..\,b = c+c\,..\,d$	$a+a+b\,..\,b = c+c+d\,..\,d$
$a-a\,..\,b = c-c\,..\,d$	$a+a-b\,..\,b = c+c-d\,..\,d$
$a+b\,..\,b = c+d\,..\,d$	$a-a+b\,..\,b = c-c+d\,..\,d$
$a-b\,..\,b = c-d\,..\,d$	$a-a-b\,..\,b = c-c-d\,..\,d$

und ſ. f. ins Unendliche, weil jedes Glied auch mehreremale genommen werden darf.

b) *Durch Multiplication.*

$aa\,..\,b = ac\,..\,d$	$ab\,..\,b = bc\,..\,d$
$ac\,..\,b = cc\,..\,d$	$ad\,..\,b = cd\,..\,d$

$a.\frac{a}{b}\,..\,b = c.\frac{a}{b}\,..\,d$ gleich: $\frac{aa}{b}\,..\,b = \frac{ca}{b}\,..\,d$

$a.\frac{b}{a}\,..\,b = c.\frac{b}{a}\,..\,d$ gleich: $b\,..\,b = \frac{bc}{a}\,..\,d$

gleich: $b\,..\,b = d\,..\,d$ oder: $1\,..\,1 = 1\,..\,1$;

und ſo fort mit $\frac{a}{c}$, $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{c}$, $\frac{b}{d}$, $\frac{c}{d}$ und deren umgekehrten Vielheiten.

Auch können hierbei zwei oder mehrere Glieder zugleich als Multiplicatoren und Diviſoren genommen werden.

c) *Durch*

c) *Durch Division.*

$a:a..b = c:a..d \qquad a:c..b = c:c..d$

$a:b..b = c:b..d \qquad a:d..b = c:d..d$

So auch wenn a und c mit $\frac{a}{b}$, $\frac{a}{c}$, $\frac{a}{d}$, $\frac{b}{c}$ dividirt werden.

2) *b und d;* ſo gelten dieſelben Fälle als bei a und c.

3) *a und d*

$aa..b = c..d:a \qquad ac..b = c..d:c$

$ab..b = c..d:b \qquad ad..b = c..d:d$; gleich:

$a:b..b = c..db \qquad ad..b = c..1$

$a:c..b = c..dc \qquad a:d..b = c..dd$

$a.\frac{a}{b}..b = c..d.\frac{b}{a} \qquad a:\frac{a}{b}..b = c..d.\frac{b}{a}$, gleich:

$b..b = c..d.\frac{a}{b}$ gleich $1..1 = 1..1$

und dergleichen unzählige Fälle.

4) *b und c;* ſo gilt davon, was von a und d.

C) *Drei Glieder werden verändert;* hier muſs ebenfalls, wenn überhaupt, eine andere Proportion entſpringen; es ſind hievon unzählige Fälle; z. B.

$aa..b:a = aac..d.$

D) *Vier Glieder werden verändert;* hier entſteht entweder eine GP. gleiche oder eine ungleiche Proportion:

1) *es bleibt dieſelbe Proportion.* Unter andern;

$aa..ba = ca..da \qquad a:b..b:b = c:b..d:b$

$a+a..b+b = c+c..d+d \qquad aa+a..ba+b = ca+c..da+d$

u. ſo ferner.

2) es

2) *es entsteht eine verschiedne Proportion.*

$a+a..bb=c+c..cc$

$aa..b+b=ca..c+c$

wobei, wenn im ersten Falle b im andern $a=2$ ist, doch auch dieselbe Proportion wiederkehren kann; z. B. aus

$1..2=3..6$ wird $1+1..2.2=3+3..2.6$, gleich $2..4=6..12$.

$aa..bb=cc..dd$

$a:a..b:b=c:c..d:d=1..1=1..1$

$aa..bb=c:d..d:c$, z. B.

$1..2=3..6$ ist gleich $1.1..2.2=3:6..6:3$ gleich: $1..4=\frac{3}{6}..2$ gleich: $1..4=\frac{3}{6}..\frac{12}{6}$

$a.\frac{1}{2}a..b.\frac{1}{2}b=c.\frac{1}{2}c..d.\frac{1}{2}d$; allgemein:

$$a.\frac{n}{m}a..b.\frac{n}{m}b=c.\frac{n}{m}c..d.\frac{n}{m}d$$

weil sich die gleichvielten Theile wie die Ganzen verhalten.

$aaa..bbb=ccc..ddd$

Denn $aa..bb=cc..dd$; auch $a..b=c..d$ also auch, nach S. 215, bb, $aaa..b=ccc..ddd$.

Auch sind noch folgende Proportionen zu merken die aus einem einzelnen Verhältnisse abgeleitet werden (siehe S. 179.):

$a+a..b+b=a..b$; also $a+a..a=b+b..b$ (S. 187, 3).

$a-a..b-b=a..b$; also $a-a..a=b-b..b$.

$a+a+a..b+b+b=a..b$; also $a+a+a..a=b+b+b..b$.

$aa..ba=a..b$; also $aa..a=ba..b$.

$ab..bb=a..b$; also $ab..a=bb..b$.

$a:a..b:a=a..b$; also $a:a..a=b:a..b$; gleich:

$1..a=b:a..b$.

$a:b..b:b=a..b$; also $a:b..a=b:b..b$.

$a.a..b:\frac{1}{a}=a..b$; also $a.a..a=b:\frac{1}{a}..b$.

u. so ferner.

Aus

Aus der Einleitung und der Definition der Arithmetik ist deutlich, daſs die Lehre von den Verhältniſſen der Hauptgegenſtand der Arithmetik ſei, und ihre Anwendung durch alle übrige mathem. Wiſſenſchaften ſich hindurch erſtrecke. *Daher auch der Lernende keine Mühe ſparen muſs, hierin zu gründlicher Einſicht zu gelangen.*

27.

Ehe wir in der Betrachtung der Verhältniſſe und Proportionen weiter gehen, müſſen wir unterſuchen, was es heiſsen könne, Vielheiten von verſchiedenen Zeichen, $\mp$, mit einander zu multipliciren und zu dividiren, und von welchem Zeichen das Reſultat ſein müſſe. Und es müſſen hierbei die Beweiſse ſo allgemein geſtellt werden, daſs ſie ſowohl für endliche als idealiſche Multiplicatoren und Diviſoren gelten.

Da man von jeder Gröſse aus jede Vielheit conſtruiren (jede Gröſse mit jeder Vielheit multipliciren) kann, ſo kann man auch jede Vielheit der abſoluten Einheit, A, mit jeder anderen Vielheit multipliciren und das Product nach A ausdrücken, und ſo fort ohne Ende.

Das iſt, jede Multiplication geht eigentlich von der abſoluten Einheit aus, und jede Zahl und überhaupt jede Vielheit derſelben abſoluten Einheit, entſpringt (9) durch Multiplication aus der abſoluten Einheit z. B. 6 iſt $= 1 . 6$. Nun kann aber z. B. 6 wieder mit jeder Zahl (überhaupt mit jeder Vielheit) multiplicirt werden, z. B. $6 . 3$; woraus eben eine beſtimmte Gröſse entſtehen muſs, welche auch von A eine beſtimmte Vielheit iſt, und, wenn ſie gewürdigt werden ſoll, nach A augedrückt werden muſs; z. B. $3 . 6 = 18$ nach der abſol. Einheit. Und ſo kann man wieder 18 mit jeder

belie-

beliebigen Vielheit multipliciren und das Product nach A ausdrücken, u. ſ. f. ins Unendliche.

Da man ferner jede Gröſse als jede Vielheit anſehen und dazu die Einheit ſuchen (d. i. jede Gröſse durch jede Vielheit dividren) kann, ſo kann man auch jede Vielheit der abſoluten Einheit, A, als jede andere Vielheit anſehen, und den Quotient nach der abſoluten Einheit ausdrücken.

Z. B. $1 : \frac{1}{3} = 3$; $3 : \frac{1}{2} = 6$ (der abſoluten Einheit); $6 : 2 = 3$ (der abſ. Einheit).

Wenn alſo u und v jede mögliche Vielheiten der abſoluten Einheit (alſo auch 1 ſelbſt) bedeuten, ſo ſind die beſondern Fälle der Aufgabe folgende:

$+u \cdot +v = \mp p$?	$+u : +v = \mp q$?
$+u \cdot -v = \mp p$?	$+u : -v = \mp q$?
$-u \cdot +v = \mp p$?	$-u : +v = \mp q$?
$-u \cdot -v = \mp p$?	$-u : -v = \mp q$?

Ich will nun ganz allgemein dieſe Fälle betrachten; der Leſer wird ſich ſelbſt beſtimmte Beiſpiele in Zahlen danach bilden können.

1) Soll $+u$ mit $+v$ multiplicirt werden, ſo ſoll man von $+u$ die Vielheit v zu Stande bringen, *ſo* d. i. mit *dem* Zeichen, wie u geſetzt iſt, da alſo u poſitiv iſt, ſo iſt auch $+u \cdot +v = uv$ poſitiv.

Man erläutere ſich dieſe allgemeinen Behauptungen in Linien, wie §. 13, b gethan worden. Siehe Figur 54, wo $+u \cdot +v$ poſitiv iſt, weil u und v poſitiv ſind.

2) $+u$

2) $+u . -v = -uv$; denn man ſoll von u die Vielheit v auf die entgegengeſetzte Weiſe zu Stande bringen als u iſt; da alſo u+, ſo muſs uv− ſein. Figur. 55.

3) $-u . +v = -uv$; denn es ſoll von u die Vielheit v conſtruirt werden, gerade unter dem Zeichen als u iſt, da alſo u negativ, ſo iſt auch uv—. Fig. 56.

4) $-u . -v = +uv$; denn es ſoll von —u die Vielheit v auf die entgegengeſetzte Weiſe geſetzt werden, als u geſetzt iſt; nun iſt u—, alſo uv (13b) —. Fig 57.

5) $+u : +v = +(u : v) = +q$ (wenn q der Quotient heiſst): denn man ſoll diejenige Einheit ſuchen, wovon die Vielheit v, ſo genommen, wie die geſuchte Einheit (q) iſt $= +u$ iſt; alſo muſs q+ ſein. Fig. 58.

6) $+u : -v = -q$; denn man ſoll diejenige Einheit ſuchen, welche, wenn man ſie v-mal nicht ſo nimmt, wie ſie iſt, +u giebt; alſo hat +u das entgegengeſetze Zeichen von q; alſo q—. Fig. 59.

7) $-u : +v = -q$; denn man ſoll diejenige Einheit ſuchen, welche v-mal ſo genommen, wie ſie iſt, —u giebt; alſo hat u daſſelbe Zeichen, als q; alſo q—. Fig. 60.

8) $-u : -v = +q$; denn man ſoll diejenige Einheit ſuchen, welche v-mal nicht ſo genommen, wie ſie iſt, —u giebt; alſo hat u das entgegengeſetzte Zeichen von q, alſo q+. Fig. 61.

Hieraus folgt allgemein:

a) *Durch die verſchiedenen Beſtimmungen der Zeichen wird die Gröſse der Producte und Quotienten nicht verändert.*

 b) *Glei-*

b) *Gleiche Zeichen geben* $+$, *ungleiche* $-$.

Auch ist zu bemerken, dass alle Grössen, wenn nicht das Gegentheil bemerkt wird, positiv zu nehmen sind.

28.

(Vorher ist §. 19, S. 145 und 146 nachzulesen, und zu überdenken.)

Man erhält dasselbe Product, wenn man die beiden Factoren der Multiplication (S. 61) verwechselt. Es ist diess schon, §. 23. S. 188. unter 7, bewiesen worden. Jetzt aber soll es auf eine gleich ursprüngliche Art bewiesen werden. (A bedeute die absolute *unbestimmte* (S. 145) Einheit, v den Multiplicator, a den Multiplicand.)

Denn es ist (S. 145)

$$A .. v = a .. p;$$

also auch, §. 23, S. 187, 3:

$$A .. a = v .. p$$

also erhält man dieselbe p, wenn man von a die Vielheit v, oder von v die Vielheit a nimmt.

Man erhält nicht einerlei Quotienten, wenn man Dividend und Divisor verwechselt. (A heisse wieder die *unbestimmte* absolute Einheit (S. 145), a Dividendus, v Divisor, q Quotient.)

Denn es ist (S. 146)

$$v .. A = a .. q;$$

aber nicht (§. 26. S. 201. unter d.)

$$a .. A = v .. q:$$

also auch nicht $a : v = v : a$; weil dann ein anderes q in der Proportion zu

$$a .. A = v .. x \; (\gtrless q)$$

entsteht.

Z. B.

Z. B. $2 .. A = 6 .. 3$; aber
$6 .. A = 2 .. \frac{1}{3}$.

Dieſer Beweiſs gilt (19) für endliche und idealiſche Multiplicatoren und Diviſoren, d. i. q und p mögen Zahlen ſein oder nicht.

Wenn a : b und b : a, ſo kommt im anderen Falle gerade der umgekehrte Quotient, q, als im erſten.

Denn im erſten Fall wird die abſolute Einheit, A, mit a multiplicirt und hernach mit b dividirt; der Quotient iſt alſo $\frac{a}{b}$ der abſoluten Einheit;

denn wenn a . A durch b dividirt wird, und auch A durch b dividirt wird, ſo erhält man im letzten Falle den Quotienten $\frac{1}{b}$ (denn $1 = A$ in b Theile getheilt, und 1mal genommen giebt $\frac{1}{b}$). Nun verhalten ſich aber gleiche Vielheiten wie die Ganzen (22); alſo auch $a .. 1 =$ der bte Theil von $a .. \frac{1}{b}$ (dem bten Theil von $1 = A$). Wenn man daher, $\frac{1}{b}$ a mal nimmt, ſo muſs man (23) den b-ten Theil von a erhalten; man nimmt aber (10) $\frac{1}{b}$ a-mal, wenn man ſetzt $\frac{a}{b}$: alſo iſt auch $a .. b = $ $= (A . a) : b = \frac{a}{b}$.

Im andern Falle erhält man aus gleichen Gründen zum Quotienten $\frac{b}{a}$.

 Nun

Nun aber ist (17a) $\frac{a}{b}$ von $\frac{b}{a}$ die umgekehrte Zahl; also erwiesen, w. z. e. w.

29.

Bisher wenn von Grösse der Verhältnisse die Rede war, wurde eigentlich nur die Bestimmtheit der Vielheit betrachtet, welche das Vorderglied vom Hintergliede, oder umgekehrt, ist. Es fragt sich, ob denn nicht auch von Grösse der Verhältnisse, als solcher, die Rede sein müsse? Dann müsste das Verhältniss als eine eigenthümliche Art von Grösse betrachtet werden, deren Betrachtung aber doch in die Arithmetik gehörte, weil das Verhältniss, dessen Grösse betrachtet würde, allen Grössen aller Art gemeinsam ist. Es ist also zuförderst zu untersuchen, ob es Sinn habe, und was es heissen könne: *ein Verhältniss angeben, was mehrern andern Verhältnissen zusammengenommen gleich sei* (so wie man stetige Grössen, z. B. Linien zusammensetzen kann); ferner: *ein Verhältniss angeben, welches entsteht, wenn von irgend einem Verhältnisse eins oder mehrere Verhältnisse weggenommen werden.* Dann wird auch betrachtet werden können, was es heissen könne: *ein Verhältniss mit irgend einer Vielheit multipliciren oder dividiren.* Die Aufgabe die in diesem §, so weit es die Grenzen dieses Grundrisses erlauben, gelöst werden soll, kann also auch so angegeben werden: es soll *das Verhältniss der Verhältnisse*, und *die Addition, Subtraction, Multiplication und Division der Verhältnisse erkannt werden.*

A)

1) Sollen zwei Verhältnisse *zusammengesetzt* werden, so soll ein drittes Verhältnis gefunden werden, welches beiden zusammengenommen gleich ist. Gesetzt es sollen die beiden Verhältnisse 1 . . 2 und 3 . . 4 zusammengesetzt werden,

den, so wird ein drittes Verh. gesucht, welches den beiden ersten gleich ist, das ist, sowohl das Wesen des ersten, als des andern in sich enthält. Soll aber das dritte, gefundene, sowohl das Wesen von 1..2 als 3..4 in sich enthalten, so muss sein Vorderglied von seinem Hintergliede sowohl die Hälfte (wie 1 in 1..2), als auch der vierte Theil 3mal (wie 3 in 3..4) sein; denn das Wesen jedes Verhältnisses besteht in der Bestimmtheit der Vielheit der Glieder gegen einander (3). Mit andern Worten: das dritte gefundene Verh. muss sein Vorderglied aus seinem Hintergliede (oder umgekehrt) sowohl nach dem Gesetze (der Art der Vielheit) von 1..2, als auch nach dem Gesetze von 3..4 bilden. Diess wird geschehen, wenn man erst das Verhältniss 1..2 nimmt, und dann die beiden Glieder davon nach dem Verhältnisse von 3..4 weiter construirt, das ist von 1 das 3 fache, und von 2 das Vierfache nimmt; so erhält man: 3..8, welches Verhältniss also sowohl nach dem Gesetze von 1..2, als auch zugleich nach dem Gesetze von 3..4 gebildet, also den beiden ersten (1..2 + 3..4) gleich ist.

Und im allgemeinen also, wenn man a..b + c..d sucht, muss ein drittes Verhältniss gebildet werden, welches zugleich nach dem Gesetze von a..b und dem Gesetze von c..d gebildet ist, also beide in der Bestimmtheit der Vielheit seiner Glieder in sich fasst. Diess Verhältniss aber wird gefunden, wenn man a und b als 1 ansieht, und von a das c fache von b aber das d-fache zu Stande bringt; also wenn man homologe Glieder der zusammenzusetzenden Verhältnisse in einander multiplicirt (oder *producirt*). Also ist allgemein:

$$a..b + c..d = ac..bd.$$

Ich will diess durch ein Beispiel zuförderst erläutern. Es seien, F. 62. zwei rechtwinklige vierseitige Figuren A und B gegeben; es soll ihr Flächeninhalt bestimmt werden; so

ſo kommt es hierbei erſtlich auf die Längen, ac und $\alpha\gamma$, zweitens auf die Höhen, ab und $\alpha\beta$ an. Wären nun die Längen gleich, ſo würde der Flächeninhalt blos durch das Verhältniſs der Höhen, ab .. $\alpha\beta$ = 6 .. 5 beſtimmt, es wäre alſo A .. B = 6 .. 5. Wird aber auch die Länge ungleich geſetzt, z. B. ac .. $\alpha\gamma$ = 2 .. 3, ſo iſt A .. B = 6 + 6 .. 5 + 5 + 5 = 2.6 .. 3.5 = 12 .. 15; alſo aus dem Verhältniſſe der Längen und Höhen zuſammengeſetzt, d. i. A .. B iſt erſtlich nach dem Geſetze von 6 .. 5, dann auch *zugleich* nach dem Geſetze von 2 .. 3 gebildet. Woraus auch deutlich iſt, daſs die Zuſammenſetzung von 2 Verhältniſſen immer da wird angewendet werden müſſen, wo eine Sphäre von Gröſse (z. B Fläche) beſtimmt wird durch 2 andere, ihr accidentelle, Arten von Gröſse (z. B. Länge und Höhe).

2) Da man alle mögliche Verhältniſſe zuſammenſetzen kann, ſo kann man auch daſſelbe Verhältniſs zu ſich ſelbſt ſetzen. Iſt das Verhältniſs 1 .. 1, ſo iſt auch 1 .. 1 + 1 .. 1 wieder = 1 .. 1, weil 1 . 1 = 1 iſt. Iſt aber ein Verhältniſs der Ungleichheit gegeben der Form 1 .. 1 $\mp$ p, ſo kann (1 .. 1 $\mp$ p) + (1 .. 1 $\mp$ p) nicht ſein = 1 .. 1 $\mp$ p. Denn es iſt, wenn der Kürze wegen a .. b jedes Verhältniſs der Ungleichheit bedeutet a .. b + a .. b = aa .. bb. Aber aa .. bb $\gtrless$ a .. b (22). Und zwar, wenn a > b, ſo iſt auch aa .. bb > a .. b, weil von a ein höheres Vielfache genommen wird, als von b; wenn aber a < b, ſo iſt auch aa .. bb < a .. b

Das Verhältniſs aa .. bb hält alſo das, a .. b, zweimal in ſich, das iſt aa .. bb = 2(a .. b), oder: aa .. bb iſt das *doppelte* (ratio duplicata, *nicht dupla* 17, b) oder *noch einmal ſo hohe* Verhältniſs, als a .. b.

3) Da man ferner jedes Verhältniſs zu jedem ſetzen kann, alſo auch zu jedem Verhältniſſe ſein *umgekehr-*

tes

tes (*reciprokes*), so ist: a..b + b..a = ab..ba = ab..ab (weil auf die Ordnung der Factoren nichts ankommt) = 1..1. Wenn man also zu dem directen Verhältnisse sein umgekehrtes setzt, erhält man in jedem Falle das Verhältniss der Identität. Wenn man mit —(a..b) das umgekehrte Verh. bezeichnet, so ist daher a..b + (—(a..b)) = 1..1.

4) Da man eben zu jedem Verhältnisse jedes setzen kann, so kann man zu a..b entweder das directe oder indirecte Verhältniss c..d setzen. Dann ist a..b + (—(c..d)) = ad..bc.

5) Da auf die Ordnung der Factoren nichts ankommt, so muss a..b + c..d gleich sein a..d + c..b. Denn ersteres giebt:

a..b		a..d
c..d	, anderes:	c..b
ac..bd		ac..db.

6) Wenn man ein Verhältniss m..n hat, so kann man so viele 2 Verhältnisse finden als man will, wenn man sowohl m als n in 2 Vielheiten theilt, die mit einander multiplicirt m und n geben. Es sei also m = o.p und n = q.r, so ist m..n = o..q + p..r auch gleich o..r + p..q.

Z. B. 20..21 ist = 4.5..3.7; also ist 20..21 = 4..3 + 5..7; auch gleich 4..7 + 3..5. Denn

4..3		4..7
5..7	oder:	5..3
20..21		20..21

7) Hat man zwei Grössen q und p, die als Vielheiten der absoluten Einheit ausgedrückt sind, mögen sie nun davon .,. oder .?. Vielheiten sein: so ist das Verhältniss

nifs von der abfoluten Einheit, 1..p aus den beiden Verhältniffen 1..q und q..p zufammengefetzt.

Denn 1..q +
q..p =

1q..qp = 1..p (22, d, β).

8) Hat man im allgemeinen 3 Gröfsen; p, q, r, fo ift das Verhältnifs p..r = p..q + q..r.

Denn p..q +
q..r =

pq..qr = p..r (22, d, β)

Z. B. 3..7 + 7..11 = 3..11.

Diefe Sätze gelten, wegen des allgemeinen Beweifes in 1, ganz allgemein für endliche und idealifche Verhältniffe.

9) Auf diefelbe Art nun kann man auch 3, 4, 5 n Verhältniffe zufammenfetzen; d. i. allgemein, wenn a..b + c..d + e..f + g..h gefucht wird, fo nimm erftlich a..b + c..d = ac..bd; dazu fetze e..f, fo ift ac..bd + e..f = ace..bdf; dazu fetze endlich g..h, fo ift ace..bdf + g..h = aceg..bdfh. Man findet alfo das mehreren beftimmten Verhältniffen gleiche Verhältnifs, wenn man das Verhältnifs des Products aus allen Vordergliedern in alle Hinterglieder nimmt. Und weil, bei der Addition auf die Ordnung des Hinzugenommenen nichts beruht (13b), fo folgt, dafs man daffelbe erhalten müffe, man möge diefe oder jene Ordnung der zufammenzufetzenden Verhältniffe befolgen; welches auch daraus gewifs ift, weil auf die Ordnung der Factoren in den Producten nichts ankommt.

10) Wenn man mehrere Verh. zuſammenſetzen ſoll, ſo können alle oder einige davon verkehrt zuſammengeſetzt werden ſollen; dann muſs man die Glieder jedes verkehrt zuſammenzuſetzenden Verhältniſſes in anomologe Glieder multipliciren (4 d. §.); z. B. wenn a..b + (—(c..d)) + e..f geſucht, ſo iſt

a..b +		a..b +
—(c..d) +	gleich:	d..c +
e..f		e..f
ade..bcf.		ade..bcf.

11) Wenn man alle Verhältniſſe, ſo viele als man deren will, zuſammenſetzen kann, ſo kann man auch daſſelbe Verhältniſs, ſo vielmal als man will, zu ſich ſelbſt ſetzen; im allgemeinen alſo iſt von a..b

das *einfache* —	*doppelte* —	*dreifache* Verh.
(ratio ſimplex)	(rat. duplicata)	(rat. triplicata)
a..b	a..b +	a..b +
	a..b +	a..b +
	aa..bb +	a..b +
		aaa..bbb.

Und im allgemeinen $a^n..b^n$ das n-fache, oder n-mal ſo hohe (*groſse*) Verhältniſs (ratio n— tuplicata, nicht n— tupla 17b) von a..b, wenn der oben angeſetzte Buchſtabe n bedeutet, wie viele ganze male, ſowohl a als b mit ſich ſelbſt multiplicirt werden ſolle.

Und da ferner jedes Verhältniſs auf die Form 1..1 +p oder 1..1 — p gebracht werden kann, oder noch allgemeiner auf die Form 1..p (wo b jede mögliche Vielheit, *nicht blos Zahl*, von 1 bedeutet): ſo iſt vorzüglich zu bemerken, wie von 1..p die Vielfachen gebildet werden. Es iſt aber (weil 1.1.1..... immer 1) von 1..p

das

das einfache Verh. $1..p$
das doppelte (rat. duplicata) $1..pp = 1..p^2$
das dreifache (rat. triplicata) $1..ppp = 1..p^3$
das n-fache (rat. n-tuplicata) $1..p^n$.

Z. B. von $1..2$, das doppelte $1..2.2 = 1..4$; das dreifache $1..8$; das n-fache $1..2^n$.

12) Das Verhältniſs der Einheit zu der letzten von n Gröſsen iſt aus dem Verhältniſſe aller zwiſchenliegenden zuſammengeſetzt; z. B. alſo, wenn $1, a, p, \frac{n}{m}, q$ gegeben iſt, ſo iſt $1..q = 1..a + a..p + p..\frac{n}{m} + \frac{n}{m}..q$.

Denn

$$\frac{\begin{array}{l} 1..a + \\ a..p + \\ p..\frac{n}{m} + \\ \frac{n}{m}..q \end{array}}{1ap\frac{n}{m}..ap\frac{n}{m}q} = 1..q \quad (22, d, \beta)$$

weil beiderſeits durch $ap\frac{n}{m}$ dividirt wird.

Z. B. in $1, 7, 11, 19$, iſt $1..19 = 1..7 + 7..11 + 11..19$.

13) Von n Gröſsen iſt das Verh. der erſten zu der letzten, aus den Verhältniſſen, aller auf einanderfolgenden nächſten zwiſchenliegenden zuſammengeſetzt; z. B. in a, b, c, d, e, iſt $a..b + b..c + c..d + d..e = a..e$.

Denn

$$\begin{array}{l} \text{Denn}\ a..b + \\ \quad b..c + \\ \quad d..e + \\ \quad e..f \\ \hline \quad = \end{array}$$

abde..bcef $=$ a..f (22, d, β).

15) Wenn man zwei Grössen hat, m und n, und man findet von der einen, wie von der andern gleichviele, p, übrigens beliebig zu bestimmende Factoren, welche in sich producirt gerade m und n geben; so ist das Verhältniss aus allen je p Verhältnissen zusammengesetzt, die sich aus allen Factoren in m zu jedem einzelnen Factor in n bilden lassen. Das ist, wenn z. B. m $=$ abcd und n $=$ efgh: so ist m..n $=$ a..e $+$ b..f $+$ c..g $+$ d..h; denn

$$\begin{array}{l} a..e + \\ b..f + \\ c..g + \\ d..h \\ \hline = \end{array}$$

abcd..efgh $=$ m..n, nach der Voraussetzung.

Und da hierbei nichts auf die Ordnung der Factoren ankommt, so kann man alle nur mögliche Verbindungen von den Factoren von m mit den Factoren in n annehmen, bei welchen nur unten abcd..efgh herauskommt; das ist schon in diesem Falle, wenn 4 Factoren sind, auch alle unter einander verschieden sind, giebt es sehr viele je 5 verschiedene Verhältnisse, welche alle in ihrer Zusammensetzung abcd..efgh geben.

Wie viele giebt es solcher verschiedener Fälle, bei 1, 2, 3, 4, 5, 6......*p Factoren von m und n? Diese Frage kann nur vermöge der Combinationslehre* (13^a^) *gelöst werden, und ist daher bis dahin aufzuheben, wo die Elemente der Combinationslehre dargestellt sind.*

B)

B)

1) Soll aus irgend einem Verh. e..f ein anderes c..d herausgenommen (oder von e..f hinweggenommen, *von ihm ſubtrahirt* werden) und der Reſt (das iſt das Verh., welches übrig bleibt) gefunden werden: ſo muſs der Reſt, a..b mit c..d zuſammengeſetzt, e..f geben; alſo iſt e..f = c..d + a..b = ca..db; alſo e = ca und f = db. Wenn man daher e als das c-fache anſieht (*durch c dividirt*) ſo erhält man den Quotient (das iſt die Gröſse, wovon ca das c-fache iſt) a, oder das erſte Glied des geſuchten Reſts; wenn ferner auch db als das d-fache angeſehen (*durch d dividirt*) wird, ſo erhält man den Quotient b, als das Hinterglied des geſuchten Reſts. Es iſt alſo e..f — c..d = e:c..f:d. Und zwar, weil jede Gröſse mit jeder anderen dividirt werden kann und immer einen beſtimmten Quotient giebt (11; 19), ſo giebt es immer ein beſtimmtes Verhältniſs als Reſt; es mögen übrigens die Verhältniſſe .,. oder .?. ſein.

2) Wird ein Verhältniſs von ſich ſelbſt ſubtrahirt, ſo entſteht nicht nichts, ſondern das Verhältniſs der Identität; weil 1..1 + a..b = a..b.

Z. B. 2..5 — 2..5 = 2:2..5:5 = 1..1.

3) Ein Verhältniſs kann von dem andern direct oder indirect (gerad oder umgekehrt) hinweggenommen, ſubtrahirt werden. Wird es indirect ſubtrahirt, ſo dividirt man mit anomologen Gliedern; d. i. e..f — (— c..d) = e:d..f:c.

Z. B. 9..16 — (— 2..3) = 9:3..16..2 = 3..8.
Denn 3..8 + (— 2..3) = 3.3..8.2 = 9..16.

4) Wenn von e..f weggenommen worden iſt a..b, ſo kann man von dieſem Reſt wegnehmen c..d, von dem

dem neuen Reſt wieder ein neues Verh., $g..h, \ldots\ldots$ u. ſ. fort ohne Ende.

Denn bei jeder Diviſion mit jedem Diviſor und Dividendus kommt ein beſtimmter realer Quotient (11; 19).

Z. B. $9..40 - 1..2 = 9..20.$

$9..20 - 3..4 = 9:3..20:4 = 3..5.$

$3..5 - 3..5 = 1..1.$

$1..1 - 2..3 = 1:2..1:3 = \frac{1}{2}..\frac{1}{3}.$

5) Auch kann daſſelbe Verhältniſs von ſich ſelbſt, ſo viele male nach einander, als man will, hinweggenommen werden (4).

Z. B. $2..16 - 1..8 (= 2..16) = 2:1..16:8 = 2..2$

$2..2 - 1..8 = 2:1..2:8 = 2..\frac{2}{8}$

u. ſ. f. ohne Ende.

6) Wenn eine beſtimmte Menge von Gröſsen a, b, c, d......n gegeben ſind; ſo findet man aus dem Verh. der erſten zur letzten, das Verhältniſs der erſten zur vorletzten, wenn man von demſelben, das Verh. der vorletzten zur letzten abzieht.

Das iſt $a..d - c..d = a..c$;

Denn $a..d - c..d = a:c..d:d = a:c..1 = (a:c)c..1c = a..c$ (22, d, β).

6) *Das directe Verhältniſs*, $+(a..b)$, *hinzunehmen (addiren)*, iſt gleichbedeutend mit: das *indirecte (umgekehrte) Verhältniſs*, $-(a..b) = +(b..a)$, *hinwegnehmen (ſubtrahiren)*.

Alſo $(e..f + a..b) = e..f - (-(a..b))$.

Denn $e..f + a..b = ea..fb$.

Aber auch $e..f - (-(a..b)) = e..f - b..a = e:b..f:a = (e:b)b..(f:a)b$ (22, S. 177) $= e..(f:a)b = ea..(f:a)b.a = ea..(f:a)ab = ea..fb$.

7) *Das*

7) *Das umgekehrte Verh.*, — (*a*..*b*) = + (*b*..*a*) *hinzunehmen* ist gleich: *das gerade Verh.*, *a*..*b*, *hinwegnehmen.*

Alſo e..f + (—(a..b)) = e..f — a..b.

Denn e..f + (—(a..b)) iſt = e..f + b..a = eb..fa.

Aber auch e..f — a..b = e:a..f:b = (e:a)a..(f:b) a = e..(f:b) a = eb..(f:b)ab = eb..fa.

8) Wenn von e..f ein anderes Verhältniſs c..d weggenommen wird, und es iſt e:c..f:d = c..d; ſo iſt c..d das halbe Verhältniſs von e. f (ratio ſubduplicata, *nicht ſubdupla*, 17b, τȣ e..f); weil c..d + c..d = e..f.

Z. B. 4..16 — 2..4 = 4:2..16:4 = 2..4, alſo iſt 2..4 das halbe Verh. (rat. ſubduplicata) von 4..16.)

Wenn ferner e..f — c..d giebt a..b, und a..b — c..d giebt c..d; ſo iſt c..d das drittheilſte Verhältniſs von e..f (ratio ſubtriplicata τȣ e..f.

Z. B. 1..27 — 1..3 = 1:1..27:3 = 1..9; 1..9 — 1..3 = 1:1..9:3 = 1..3. Alſo iſt 1..3 das drittheilſte Verhältniſs (das zum dritten Theile *ſo hohe* Verhältniſs) von 1..27.

Woraus auch klar iſt, daſs, wenn von e..f das Verh. c..d n-mal weggenommen, ſelbſt c..d giebt, e..f das (n+1)-fache Verhältniſs von c..d, und c..d das (n+1)-theilſte (ratio ſub (n+1)-tuplicata τȣ e..f) von e..f iſt.

Die Addition und Subtraction der Verhältniſſe wird immer da angewandt, wo eine Art von Gröſse, durch mehrere in ihr ſelbſt accidentelle Arten von Gröſsen beſtimmt wird. So iſt zum B. der körperliche Inhalt durch Länge, Breite, Höhe, direct beſtimmt; alſo auch das Verhältniſs

zweier körperlicher Inhalte aus den directen Verhältnissen ihrer Längen, Breiten, Höhen zusammengesetzt. Bestimmen aber Accidenzen ihre Substanzen in Absicht der Grösse in entgegengesetztem Wachsthume, so müssen deren Verhältnisse weggenommen (*subtrahirt*) oder ihre negativen Verh. dazu gesetzt (*addirt*) werden. Wie diess sei, kann nur aus der bestimmten Natur der Grössen selbst erkannt, daher in der Arithmetik nicht gelehrt werden. So ist z. B. das Fertigwerden einer Arbeit durch die Grösse der Arbeit direct, durch die Grösse der angewandten Kräfte (der Arbeiter etwa) indirect bestimmt. Wenn daher 2 Arbeiten A und a, gegeben sind, so ist das Verh. der Zeiten des Fertigwerdens, Z..z, aus dem directen Verhältnisse der Arbeit, A..a, und dem indirecten der Kräfte, — (K..k) = k..K zusammengesetzt; also

$$\begin{array}{c} A..a \\ k..K \\ \hline Ak..aK = Z..z. \end{array}$$

C)

Hieraus wird deutlich sein, dass auch Verhältnisse zu einander von bestimmter Grösse sind, oder gegen einander, als Verhältnisse, ein Verhältniss haben. So z. B. verhält sich $(2..4)..(1..2) = 1..1$; $(2..8)..(4..64) = 1..2$; $(aa..bb)..(a..b) = 2..1$; $(a^3..b^3)..(a..b) = 3..1$. Das Verhältniss der Verhältnisse will ich der Kürze wegen *Logolog* (λογος λογων) nennen. Zu $(1..9)..(1..3)$ ist also der Logolog $2..1$, weil $1..3 + 1..3 = 1..9$.

So wie überhaupt das Verhältniss zweier oder mehrerer Grössen gefunden wird (17b, 18), so auch das Verhältniss der Verhältnisse, der Logolog. Gesetzt also es seien zwei Verhältnisse A und B gegeben, so sehe man welches von beiden das kleinere ist. Es sei $A < B$; so nimm A von

B so

B so viele ganzemale weg, als möglich; A misst B entweder oder nicht. Misst A B, d. i. ist B ein ganzes Vielfaches von A, so ist der Logolog gefunden; misst A das Verh. B nicht, so bleibt ein Rest, d. i. ein bestimmtes Verhältniss $< A$ ($< B$), welches ich α oder den ersten Rest nenne. Diess, α, vergleiche wieder mit a, und siehe, ob ein Rest bleibt, oder ob α a misst. Misst α das Verh. a, so misst es auch b, und der Logolog ist gefunden. Misst α das Verh. a nicht, so bleibt ein neues Verhältniss zum Rest, diess heisse β, $< \alpha < a < b$; und so fahre fort, bis endlich einmal ein Rest den nächstvorigen, also auch alle vorigen misst, oder, — wenn man beweisen könnte, dass in vielen Fällen in Ewigkeit ein neuer Rest bleiben müsse, — bis man auf einen Rest kommt, der für den Gebrauch klein genug ist.

Verhältnisse, wovon einmal irgend ein Verhältniss gefunden wird, welches beide durch ganze Wiederholungen ausmisst, sind gegen einander commensurabel oder von endlichem Logologen: Verhältnisse aber zu denen es kein Verhältniss giebt, welches beide in ganzen Wiederholungen ausmisst, sind gegen einander incommensurabel. oder von unendlichem (idealischem) Logologen. Es werden also folgende Ausdrücke hieraus sich erklären: (a..b).,.(c,.d) und (a..b).?.(c..d).

Je zwei Verhältnisse haben gegen einander nur *ein* bestimmtes Verhältniss (nur einen Logologen) (3). Wobei die beiden Verhältnisse beliebiger Art (S. 155.) können ausgedrückt sein.

Z. B. (2..3)..(15..6) = (4..6)..(5..2) welches also eine Proportion der Verhältnisse giebt.

Zwei Paare von Verhältnissen, wovon die 2 ersteren denselben Logologen haben, als die beiden andern, bilden eine *Verhältnissproportion* (*Logologengleichheit*) z. B.

(1..2)

(1..2)..(1..4) = 1..2; auch
(3..9)..(9..81) = 1..2; also
(1..2)..(1..4) = (3..9)..(9..81).

(Die Kürze dieses Grundrisses verbietet, die Aufsuchung der Logologen, und die Eigenschaften der Logologen (wie 22) und der Verhältnisproportionen (wie 23 bis 27), welche die gröſste Aufmerksamkeit verdienen, hier weiter zu erklären. Es ist hier genug dem selbstdenkenden Mathematiker ein neues, überhaupt noch wenig gangbares Feld der mathematischen Betrachtung gezeigt zu haben. Doch will ich noch 2 kurze Beispiele der Aufsuchung des Logologen hersetzen).

Es sei der Logolog von (1..4)..(1..8) zu suchen. Das kleinere Verh. also A, ist 1..4, das gröſsere 1..8. Wie vielmal liegt 1..4 in 1..8? einmal sicherlich. Auch zweimal? das doppelte 1..4 (d. i. 2(1..4)) ist = 1..4.4 = 1..16; welches > 1..8 ist. Also ist 1..4 in 1..8 nur einmal gelegen. Man nehme also A von B weg, um den ersten Rest, α, zu finden. Also 1..8 — 1..4 = 1:1..8:4 = 1..2; also ist α = 1..2. Nun vergleiche α = 1..2 mit A, = 1..4; so ist 1..2 gerade 2 ganzemale in 1..4 gelegen, denn 1..2 + 1..2 = 1.1..2.2 = 1..4. Also miſst α A, also auch B. Die Stufe (17, b) ist $\frac{1}{1}$ I $\frac{1}{2}$ = $\frac{2}{3}$; es ist also A..B = (1..4)..(1..8) = 2..3; der gemeinsame Maſsstab aber 1..2. Also ist 1..4 = 2(1..2); 1..8 aber 3 (1..2). Demnach auch 1..8 = (1..4)·$\frac{2}{3}$. Auch ist 1..2 der *gröſste gemeinsame Maſsstab*.

Oder es sei (1..2)..(1..3) zu suchen. So ist 1..2 < 1..3 weil 1..2 mehr als 1mal genommen werden muſs, um 1..3 zu geben; also 1..2 = A; 1..3 = B. A ist in B nicht zweimal; denn 2(1..2) schon 1..4; also nur einmal. Man nehme also 1..2 weg von 1..3, und man er-

hält

hält α; alſo $\alpha = 1..3 - 1..2 = 1:1..3:2 = 1..\frac{3}{2} = 2..3$ (22). Nun vergleiche wieder 2..3 mit 1..2; und ſo fort *ohne Ende*, da, wie nur hier zunächſt nicht gezeigt werden kann, (1..2).?.(1..3).

D)

Nunmehr wird auch deutlich ſein, was es ſagen wolle, *Verhältniſſe mit beſtimmten Vielheiten* (nicht *Verhältniſſen*) *multipliciren und dividiren.* Welche Vielheiten wohl auch idealiſch ſein könnten; wenn es nehmlich incommenſurable Logologen giebt, wie freilich hier, wie überhaupt die Frage nach incommenſurabeln Verhältniſſen (S. 132), unerörtert bleiben muſs.

Ein Verhältniſs a..b mit v multipliciren, heiſst von a..b als Einheit, ein Verhältniſs conſtruiren, welches von a..b das v-fache iſt. Z. B. alſo $(2..3).3 = 2.2.2..3.3.3 = 2^3..3^3 = 8..27$. Oder $(1..4).\frac{1}{2} = 1..2$; weil $1..2 + 1..2 = 1..4$.

Ein Verh. a..b mit v dividiren heiſst: das Verhältniſs a..b als das v-fache anſehen, und die Einheit dazu ſuchen; oder: das Verhältniſs ſuchen, wovon a..b das v-fache iſt; oder das Verh. ſuchen, welches mit v multiplicirt a..b giebt; z. B. $(1..9):2 = 1..3$, weil $1..3 + 1..3 = 1..9$. Oder $(5..7):\frac{1}{2} = 5^2..7^2 = 25..49$; weil man nehmlich das Verhältniſs ſucht, wovon 5..7 das halbe iſt, ſo muſs deſſen doppeltes das geſuchte ſein, alſo $5..7 + 5..7 = 25..49$.

Allgemein alſo: ſoll man a..b mit $\frac{n}{m}$ multipliciren, d. i. $(a..b).\frac{n}{m}$ nehmen; ſo muſs man a..b in m Theile theilen, und das Verh. welches von a..b der m-te Theil, n-mal nehmen. Das Verhältniſs aber, welches von a..b der

der m-te Theil ist, wird gefunden, wenn man für a einen Factor α sucht, so dass α m-mal als Factor hintereinander genommen, oder α^m giebt a; und ferner auch von b einen Factor, β, der m-mal nach einander genommen, β^m, giebt b.

Es werde z. B. 4..9 multiplicirt mit $\frac{3}{2}$; so nimm erstlich von 4..9 die Hälfte, das ist, nimm die Vielheit welche, wenn man die Einheit mit ihr 2mal nach einander multiplicirt, 4 giebt, das ist 2, und für 9 die ähnliche 3; so ist 2..3 die Hälfte von 4..9; diese Hälfte nimm 3mal, also $2..3 + 2..3 + 2..3 = 2.2.2..3.3.3 = 8..27$. So ist also $8..27 = (4..9).\frac{3}{2}$.

Ferner allgemein: soll man a..b mit $\frac{n}{m}$ dividiren, d. i. $(a..b) : \frac{n}{m}$ nehmen; so muss man das Verhältniss suchen, wovon a..b das $\frac{n}{m}$-fache ist. Also ist erst a..b in n Theile zu theilen, und der n-te Theil von a..b m-mal zu nehmen.

Z. B. 1..32 sei zu dividiren durch $\frac{5}{3}$; so ist erst von 1..32 der fünfte Theil zu suchen, dieser ist 1..2, indem $1..2^5 = 1..32$. Dieser fünfte Theil von 1..32 ferner 3mal genommen, giebt $1..2^3 = 1..8$. Also ist $(1..32).\frac{5}{3} = 1..8$.

(Vergleiche hiermit insbesondere 11 und 19.)

E)

Weil sich ganz allgemein die Ganzen verhalten wie gleiche Vielheiten (S. 177 §. 22), so folgt auch für die Verhältnisse, als Grössen betrachtet, dass wenn irgend 2 Verhältnisse gleich sind, auch die gleichen Vielheiten von

beiden gleich ſein müſſen. Das iſt, wenn $a..b = c..d$ ſo iſt auch ſowohl

$$(a..b) \cdot \frac{n}{m} = (c..d) \cdot \frac{n}{m}; \text{ als auch:}$$

$$(a..b) : \frac{n}{m} = (c..d) : \frac{n}{m};$$

wo n und m jede, endliche und idealiſche, Vielheiten bedeuten.

Da nun 2 gleiche Verhältniſſe eine Proportion bilden, ſo folgt: daſs wenn die beiden Sätze (Verhältniſſe) der Proportion zu gleicher Vielheit durch Multiplication oder Diviſion mit gleichen Zahlen verändert werden, wieder 2 gleiche Verhältniſſe, alſo eine neue Proportion entſpringe, jedoch allemal eine Proportion eines anderen Verhältniſſes; weil die Vielheiten nicht der Einheit gleich ſein können.

Z. B. $1..4 = 9..36$; alſo auch

$$(1..4) \cdot \tfrac{1}{2} = (9..36) \cdot \tfrac{1}{2};$$
$$(1..4) : 2 = (9..36) : 2;$$
$$1..2 = 3..6:$$

30.

a) Jede Gröſse kann als Vorderglied eines jeden Verhältniſſes angeſehen, und dazu das Hinterglied geſucht werden. Eben ſo kann auch jede Gröſse als Hinterglied eines jeden Verhältniſſes angeſehen, und dazu das Vorderglied geſucht werden (8). Geſetzt alſo, es ſolle a als Vorderglied des Verhältniſſes $\alpha..\beta$ angeſehen und dazu das Hinterglied geſucht werden: ſo finde ich dieſs, wenn ich a mit β multiplicire, und $a\beta$ mit α dividire (18. S. 189.); es iſt alſo dann $b = (a\beta) : \alpha = \frac{a\beta}{\alpha}$; ich will dieſs der Kürze wegen ſo ausdrücken; *es ſoll an a das Verhältniſs* $\alpha..\beta$ *geſetzt (von a aus conſtruirt) und deſſen Hinterglied genommen werden.* Soll aber b als Hinterglied des Verh. $\alpha..\beta$ ange-

angeſehen und dazu das Vorderglied gefunden werden, ſo iſt $a = (b\varkappa):\beta = \frac{b\varkappa}{\beta}$ (18. S. 139.); und dieſe Aufgabe will ich ſo ausdrücken: *es ſoll von b aus das Verhältniſs $\varkappa..\beta$ weggenommen (reconſtruirt) und das Vorderglied dazu geſucht werden.* Es werde zum Beiſpiel von 4 aus das Verh. 2..3 geſetzt; ſo muſs ich 4 als 2 anſehen (durch 2 dividiren) und die Hälfte davon (den Quotient) 3mal nehmen; ich erhalte alſo $(4:2).3 = 6$. Oder es werde von 12 aus das Verhältniſs 5..3 hinweggenommen; ſo wird 12 als das Hinterglied, 3, angeſehen, alſo ſein dritter Theil = 4 genommen, und daraus durch Verfünffachung das geſuchte Vorderglied gefunden; d. i. $4.5 = 20$.

b) Alle Verhältniſſe der $>$ Ungleichheit können auf die Form 1..1 — p gebracht werden (22. S. 190); z. B. $5..3 = 5:5..3:5 = 1..\frac{3}{5}$. Alle aber der $<$ Ungleichh. auf die Form 1..1 + p; z. B. $2..3 = 2:2..3:2 = 1..\frac{3}{2}$.

c) Wenn man von n aus, ein Verhältniſs der $<$ Ungleichheit, = 1..1 + p ſetzt, ſo wird m als 1 angeſehen, und (1+p) mal genommen, alſo mehr als *ein* ganzes Mal; daher muſs das neue Glied, m, $>$ n ſein. Ich nenne daher alle Verh. der Form 1..1 + p *in der Daranſetzung vergröſsernde.*

Wird hingegen von n aus ein Verhältniſs der Form 1..1 + p weggenommen, ſo wird n als 1 + p angeſehen, alſo als $>$ als das geſuchte Glied; alſo das geſuchte Glied m, $<$ n. Ich nenne daher auch die Verh. der $<$ Ungleichheit *in der Hinwegnahme verkleinernde.*

d) Wenn man von n aus ein Verh. der $>$ Ungleichh. = 1..1 — p hinzuſetzt, ſo wird n als 1 angeſehen, und dann mit 1 — p multiplicirt, alſo kein ganzes Mal genommen;

men; alſo iſt m $<$ n. Ich nenne daher die Verh. 1..1—p *in der Daranſetzung verkleinernde.*

Wird endlich von n aus ein Verh. 1..1—p hinweggenommen, ſo wird n als das 1—p·fache angeſehen, alſo als $<$ 1, und dann die Einheit conſtruirt, welche $>$ als ihr 1—p·faches; alſo iſt m $>$ n. Daher nenne ich die Verh. 1..1—p *in der Hinwegnahme vergröſsernde.*

e) Nimmt man von m aus das Verh. der Identität hinzu, oder hinweg, ſo bleibt n = m; weil 1 als Factor oder Diviſor nichts verändert.

31.

Da man von jeder Gröſse aus jedes Verh. conſtruiren und reconſtruiren kann, ſo kann man in dergleichen Conſtruction und Reconſtruction fortfahren ins unendliche. Das heiſst: von a aus findet man durch Conſtruction oder Reconſtruction irgend eines Verhältniſſes, b; von b durch Conſtruction oder Reconſtruction irgend eines Verh., c; von c aus auf ähnliche Art, d; von d, e, u. ſ. f. ohne Ende. Das iſt die Reihe a, b, c, d, e.... iſt unendlich. Denn wenn irgend ein Verhältniſs von irgend einer Gröſse aus hinzu oder hinweggenommen wird, erhält man immer einen realen Werth; alſo auch bei a, bei b, bei c.....

Es iſt alſo hier nur von Hinzuſetzen und Hinwegnehmen wirklicher Verhältniſſe wirklicher Gröſsen die Rede; nicht alſo davon, daſs die Verhältniſſe 1..0 oder 0..1 hinzu oder hinweggenommen werden ſollen. Denn genau genommen ſind dieſs gar keine Gröſsenverhältniſſe, weil 1 zu Nichts oder umgekehrt Nichts zu 1 gar kein Verhältniſs hat (3).

Die Reihe von a, b, c, d, e..... iſt alſo endlos (unendlich, *in Abſicht auf die Zahl der Glieder* unermeſslich,

lich, — ſeries infinita), und es fragt ſich nur, *wie vielerlei oberſte Gattungen ſolcher Reihen es gebe.* Die möglichen Eintheilungsgründe ſind folgende:

a) Die Verhältniſſe, welche a, b, c, ... bilden werden hinzu oder hinweggenommen;

b) die hinzu- oder hinweggenommenen Verhältniſſe ſind endliche oder unendliche;

c) die hinzu- oder hinweggenommenen Verhh. ſind alle gleich oder ungleich; und wenn ſie ungleich ſind, ſo ſind ſie entweder nach einem gewiſſen Geſetze ungleich, oder geſetzlos ungleich; und wenn ſie nach einem gewiſſen Geſetze ungleich ſind, ſo iſt dieſs Geſetz entweder ein einfaches oder ein zuſammengeſetztes; und wenn es ein zuſammengeſetztes iſt, ſo iſt es wieder nach der verſchiedenen Art der Zuſammenſetzung verſchieden;

d) das erſte Glied, a, iſt die abſolute Einheit ſelbſt, oder eine beſtimmte endliche oder idealiſche Vielheit der abſoluten Einheit.

A.

Zuerſt will ich die allereinfachſte Art dieſer Reihen betrachten: *deren erſtes Glied die Einheit ſelbſt iſt, aus welchem durch beſtändig wiederholtes Daranſetzen eines und deſſelben Verhältniſſes immer aus dem vorigen Gliede das folgende gebildet wird.* Das wiederholt daranzuſetzende Verhältniſs, $1 \,.\,.\, 1 \mp p$, welches das *Wurzelverhältniſs* heiſsen ſoll, kann .,. oder .?. ſein. Und wenn es .,., ſo kann es entweder das Verhältniſs von 1 zu einer ganzen Zahl, oder zu einer gebrochnen Zahl ſein. Weil in jedem Falle die Glieder der Reihe ganz durch die Gröſse von 1 (der abſoluten Einheit) und des Wurzelverhältniſſes beſtimmt ſind, ſo werden die Glieder dieſer Reihe insgeſammt

Machten

Machten (*Potenzen*, *Poteſtäten*, *Dignitäten*) des Wurzelverhältniſſes genannt. Das erſte Glied nach der Einheit, heiſst die erſte, das 2te die zweite, das n-te die n-te Dignität des Wurzelverhältniſſes.

a) Es ſollen alſo von dem Wurzelverhältniſſe 1..n, wo n eine jede ganze Zahl bedeutet, die auf einander folgenden Glieder (Potenzen) gefunden werden. Z. B. diene das WV. (Wurzelverh.) 1..2. Das erſte Glied wird gefunden, wenn an 1, 1..2 geſetzt wird, iſt alſo (1 : 1). 2 = 1.2 = 2. Alſo iſt die erſte Potenz 2, und es verhält ſich die abſolute Einheit zu ihrem Doppelten = 1..2 allgemein. Das zweite Glied (nach 1) oder die zweite Potenz entſteht, wenn man an die erſte 2, wieder das Wurzelverhältniſs 1..2 ſetzt; alſo iſt die 2te Potenz (2 : 1). 2 = 4. Und ſo die dritte 2 . 4 = 8; die 4te 2 . 8 = 16. Denn 1 verändert als Diviſor nichts. Da alſo das Vorderglied des WV. = 1 iſt, ſo braucht man nur die nächſtvorige Potenz mit dem Hintergliede des WV. zu multipliciren. Die Potenzen des WV. 1..2 ſind alſo folgende:

Potenzenzahl: 0, 1, 2, 3, 4, 5.....
Potenzen: 1, 2, 4, 8, 16, 32.....

Weil immer aus dem vorigen Gliede nach dem gleichen WV. das folgende gebildet wird, ſo müſſen ſich auch alle nächſtvorige Glieder zu allen nächſtfolgenden auf gleiche Weiſe verhalten; das iſt 1..2 = 2..4 = 4..8 = 8..16 = 16..32...... Alſo, weil wenn das directe, auch das umgek. Verh. gleich iſt, auch 32..16 = 16..8 = 8..4 = 4..2 = 2..1. Es bildet alſo dieſe Reihe eine ſtetige Reihe ſtetiger Proportion (25, S. 199.) des Wurzelverhältniſſes.

Das Verhältniſs einer beſtimmten Menge von Gröſsen beliebiger Art (29, 13) iſt aus den Verhh. aller vorigen

ſich

ſich nächſten nach einander, zuſammengeſetzt. Alſo z. B. 1 . . 8 = 1 . . 2 + 2 . . 4 + 4 . . 8.

Da aber alle dieſe Verhältniſſe dem WV. = ſind, ſo iſt 1 . . 8 = 1 . . 2 + 1 . . 2 + 1 . . 2 = 3 (1 . . 2); d. i. 1 . . 8 iſt das dreifache (rat. triplicata) WV. Und da ferner ſo vielmal das WV. an 1 geſetzt werden muſs, um eine Potenz m davon zu erhalten, als die hohe Potenz m vom WV. iſt, ſo folgt, daſs das Verhältniſs der Einheit zur n-ten Potenz, von 1 . . 2 das nfache WV., 1 . . 2 iſt. Man kann daher die Potenzen des WV. 1 . . 2 finden, wenn man das WV. 1mal, 2mal, 3mal nimmt.

Die Gröſse, welche andeutet die wievielte Potenz vom WV. genommen werden ſolle, heiſst *Exponent und wird an das WV. hinten - oben angeſetzt.* Z. B. $(1 . . 2)^3 = 8$.

Die Vielheit, mit welcher nach der Natur des WV. je das vorige Glied multiplicirt werden muſs, um das folgende zu geben, heiſst die *Wurzel* (radix, √); z. B. in 1 . . 2 als WV. iſt die Wurzel = 2; allgemein daher in 1 . . $\overline{+ p}$ iſt die Wurzel 1 $\overline{+ p}$, weil dann 1 als Diviſor nichts ändert.

Iſt aber 1 nicht ſelbſt eine Potenz von 1 . . 2? 1 iſt gar keine Potenz, ſondern das, was bei allem Potenziren als erſtes Glied vorausgeſetzt wird; alſo auch von 1 . . 2 die o-te Poteſtät.

b) Jedes Verhältniſs der Form 1 . . 1 + p iſt (30, d) in der Daranſetzung vergröſsernd. Nimmt man alſo irgend ein ſolches zum Wurzelverh. an, ſo müſſen die Potenzen immer in dem gleichen Verhältniſſe wachſen. Und zwar, da man zu jeder, noch ſo groſsen Gröſse, daſſelbe Verhältniſs ſetzen kann, ſo kann die letzte Potenz von jedem WV. 1 . . 1 + p gar nicht angegeben werden. Daraus folgt

folgt ferner, dafs keine noch fo grofse Gröfse, M, angegeben werden kann, über die nicht irgend eine, und nach der letzteren unendlich viele Potenzen jedes WV. $1 \,..\, 1 + p$ an Gröfse hinauskommen könnten; denn die Potenzen wachfen ins Unendliche, überfteigen daher jede Grenze. M alfo ift entweder felbft eine Potenz von $1 \,..\, 1 + p$ oder fällt an Gröfse zwifchen 2 fich nächfte Potenzen deffelben. Die Wurzel in jedem WV. $1 \,..\, 1 + p$ ift $1 + p$ felbft, weil 1 in Divifion nichts ändert. Die Potenzen alfo der Wurzel $1 + p$ find allgemein:

$$(1+p)^0, (1+p)^1, (1+p)^2, (1+p)^3, (1+p)^4 \ldots\ldots$$

c) Wenn aber von einem Verhältniffe der $<$ Ungleichh. welches nicht auf die Form $1 \,..\, 1 + p$ gebracht ift, die Potenzen gefunden werden follen? z. B. von $2 \,..\, 3$? So mufs das vorige Glied immer mit 2 dividirt, und der Quotient mit 3 multiplicirt werden; d. i. es mufs die Hälfte des vorigen Gliedes 3mal genommen werden; oder: es mufs das vorige Glied $\frac{3}{2}$ mal genommen, alfo mit $\frac{3}{2}$ multiplicirt werden. Die Wurzel alfo der Potenzen des Wurzelv. $2 \,..\, 3$ ift $= \frac{3}{2}$. Welches man auch findet, wenn man das WV. $2 \,..\, 3$ auf die Form $1 \,..\, 1 + p$ bringt; denn es ift $2 \,..\, 3 = 1 \,..\, \frac{3}{2}$.

d) Je gröfser der Multiplicator (S. 147), defto gröfser das Product deffelben in den gleichen Multiplicand; alfo je gröfser die Wurzel, defto gröfser auch irgend eine Potenz in Vergleich mit der gleich vielten Potenz einer andern Wurzel; z. B. $2^2 = 4$, $3^2 = 9$, $4^2 = 16$, $5^2 = 25$; $2^3 = 8$, $3^3 = 27$; $4^3 = 64$; $5^3 = 125$.

e) Die Einheit zur n-ten Potenz des WV. $1 \,..\, 1 + p$, ift das n-fache Verhältnifs des Wurzelverhältniffes; alfo ift auch $1 \,..\, (1 + p)^n = (1 \,..\, 1 + p)n$; z. B. alfo $1 \,..\, \frac{3}{2})^3 = (2 \,..\, 3).\, 3$. Das ift:

$2 \,..\, 3 +$

$$
\begin{array}{ll}
2\,..\,3\,+ & \\
2\,..\,3\,+ & \\
2\,..\,3 & 3^3 \\
\hline
2^3\,..\,3^3 = & 1\,..\,2^3.
\end{array}
$$

f) Wird aber ein in der Daranſetzung verkleinerndes WV. genommen, der Form $1\,..\,1 - p$ (30, c), ſo werden die folgenden Glieder immer kleiner und kleiner, ohne darum je das Nichts zu erreichen. Es ſei z. B. das WV. $2\,..\,1 = 1\,..\,\frac{1}{2}$ gegeben; ſo entſteht die erſte Potenz wenn $(1:1).\,\frac{1}{2}$ genommen wird, $= 1\,.\,\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Aus dieſer wird durch die Daranſetzung des gleichen Verh. $1\,..\,\frac{1}{2}$, $(\frac{1}{2}\,.\,1)\,\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\,.\,\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Und ſo fort ins Unendliche; darum, weil die Hälfte von jedem noch ſo kleinen Ganzen doch wieder etwas Reales (*Groſses*) iſt. Die Potenzen alſo des WV. $1\,..\,\frac{1}{2} = 2\,..\,1$, oder der Wurzel $\frac{1}{2}$, ſind:

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16}\ ,\ldots\ldots,$$

Auch hier gilt, daſs die nächſten Glieder in derſelben Richtung auf die gleiche Weiſe ſich verhalten, und eine ſtetige Proportion des WV. bilden. Denn $1\,..\,\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\,..\,\frac{1}{4} = \frac{1}{4}\,..\,\frac{1}{8}$ u. ſ. w. Auch iſt das Verhältniſs der Einheit zur n-ten Potenz, das n-fache Wurzelverhältniſs; z. B. $(2\,..\,1).3 = 1\,..\,\frac{1}{2})^3$; d. i.:

$$
\begin{array}{l}
2\,..\,1\,+ \\
2\,..\,1\,+ \\
2\,..\,1 = \\
\hline
\end{array}
$$

$$2^3\,..\,1 = 1\,..\,\frac{1}{2^3} = 1\,..\,\frac{1}{2})^3 = 1\,..\,\frac{1}{8}.$$

Die Wurzel aber bei jedem in der Daranſetzung verkleinernden WV. wird gefunden, wenn ſelbiges auf die Form $1\,..\,1 - p$ gebracht wird, und iſt $1 - p$; z. B. für das WV. $5\,..\,3 = 1\,..\,\frac{3}{5}$ iſt die Wurzel $\frac{3}{5}$.

g) Je kleiner der Multiplicator, desto kleiner auch, bei gleichem Multiplicande, das Product; also, je kleiner die Wurzel 1 — p (je > p): desto kleiner sind auch bestimmte Potestäten davon, in Vergleich auf die gleichen Potestäten grösserer Wurzeln; z. B. $\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$; $\frac{1}{3})^2 = \frac{1}{9}$; $\frac{1}{4})^2 = \frac{1}{16}$.

h) Keine Grösse ist so klein, dass es nicht eine unendliche Menge noch kleinerer Potenzen jeder verkleinernden Wurzel geben sollte (f). Die kleine Grösse, P, also, wie sie auch klein sei, ist entweder selbst eine Potenz einer jeden verkleinernden Wurzel, oder liegt zwischen zweien, ihr an Grösse nächsten.

i) Weil diese Potenzen entstehen, wenn stetig nach einander das WV. darangesetzt wird, so heissen sie füglich *positive oder bejahende* Potenzen dieser Wurzeln. Da man aber auch von der Einheit aus dasselbe Wurzelverhältniss stetig hinwegnehmen kann, so müssen auch hieraus gesetzmässige Reihen der Glieder entspringen, welche ich zunächst betrachten will, und im Gegensatz der positiven füglich *negative* oder verneinende heissen.

B.)

a) Wenn man von 1 irgend ein Verhältniss, m . . n wegnimmt, so muss man 1 als das Hinterglied n ansehen, durch n dividiren, und dann m-mal nehmen, mit m multipliciren; man erhält also $(1 : n)\, m = 1 . \frac{m}{n} = \frac{m}{n}$; z. B. von 1 das Verh. 1 . . 2 hinwegzunehmen, sieh 1 als 2 an, das ist nimm $\frac{1}{2}$; und nimm es 1mal; also erhältst du $\frac{1}{2}$; im Gegentheil von 1 das Verh. 2 . . 1 hinwegzunehmen, dividire 1 durch 1, = 1, und multiplicire es mit 2; du erhältst also 2. *Die Verhh., so in der Dararsetzung vergrössernd sind, sind in der Hinwegnahme verkleinernd* (30, *c*; *d*).

b) Es

b) Es heiſse das erſte Glied, welches durch die Hinwegnahme irgend eines Verhältniſſes von 1 entſtanden α; ſo kann man daſſelbe Verhältniſs auch wieder von α wegnehmen, und β erhalten; aus β auf die gleiche Art γ..... Die Glieder α, β, γ, δ.... ſind durchgängig durch die Gröſse des Wurzelverh. und der Einheit beſtimmt, und werden deſshalb auch Dignitäten, Potenzen, Poteſtäten des Wurzelverhältniſſes genannt, weil ſie aber durch ſtetige Wegnahme des WV. entſpringen, ſo heiſsen ſie *negative* oder verneinende Potenzen des WV. Dieſe Verneinung bezieht ſich nicht auf die Glieder (Potenzen) ſelbſt, ſondern blos auf die entgegegeſezte Art der Conſtruction (16). Wenn in dem WV. beide Glieder poſitiv geſetzt werden, ſo ſind auch alle negative Potenzen, ſo wie alle poſitive, poſitive Gröſen, weil alle Multipl. und Diviſ. mit + Gröſsen, poſitive Reſultate giebt (27).

c) Diejenige Vielheit, mit welcher 1 immer multiplicirt wird, um die poſitiven Potenzen zu geben, heiſst die Wurzel. Um die negativen Dignitäten deſſelben Wurzelverh. zu bilden, muſs man daher mit der Wurzel ſtetig dividiren. Denn es ſei allgemein das WV. $1 \,..\, \overline{1 + p}$; ſo iſt die Wurzel $\overline{1 + p}$. Setzt man dieſs WV. an 1, ſo muſs man $(1:1).(\overline{1+p})$ nehmen, $= 1.(\overline{1+p})$; nimmt man es aber von 1 hinweg, ſo muſs man $(1.1):\overline{1+p}$. nehmen, $= 1:\overline{1+p}$; z. B. von der Wurzel 2 des WVs. $1 \,..\, 2$, iſt die erſte poſitive Dignität $= 1.2$; die erſte negative Dignität aber $1:2 = \frac{1}{2}$.

Die negativen Dignitäten ſollen in ihrer Höhe auch durch obenangeſetzte Zahlen und Buchſtaben bezeichnet werden, mit beigeſetztem Zeichen der negativen Conſtruction —. Es iſt alſo z. B. $2^3 = 8$, aber $2^{-3} = \frac{1}{8}$.

d) Da

d) Da Daſſelbe herauskommt, wenn man anſtatt mit einer beſtimmten Vielheit zu dividiren, mit ihrer umgekehrten (16; 17; 19) multiplicirt; ſo kann man auch, wenn die Reihe der negativen Dignitäten gebildet werden ſoll, anſtatt mit der Wurzel zu dividiren, mit der umgekehrten Wurzel multipliciren; z. B. $2^{-2} = \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$. Welches auch daraus klar iſt, weil: ein Verh. daranſetzen, ſo viel iſt als: das umgekehrte davon nehmen, die Wurzel des umgekehrten Verh. aber, die umgekehrte Vielheit der Wurzel für das directe Verh. iſt; z. B. $(2..3)^2 = (3..2)^{-2}$ das iſt $\frac{3}{2})^2 = \frac{2}{3})^{-2}$. Im allgemeinen $(m..n)^p = (n..m)^{-p}$, d. i. $\frac{n}{m})^p = \frac{m}{n})^{-p}$.

e) Wenn von einer beliebigen Wurzel die poſitiven Potenzen endlos wachſen, ſo nehmen die negativen nach demſelben umgekehrten Verhältniſſe endlos ab; und wenn die poſitiven Potenzen endlos abnehmen, ſo nehmen die negativen endlos zu (B. d. §. a.) z. B. diene die Wurzel 2.

Negative Potenzen.				*poſitive Potenzen.*				
.. $\frac{1}{16}$,	$\frac{1}{8}$,	$\frac{1}{4}$,	$\frac{1}{2}$,	1,	2,	4,	8,	16...
..—4,	—3,	—2,	—1,	0,	1,	2,	3,	4...

Oder die Wurzel $\frac{1}{3}$.

— Potenzen			+ Potenzen			
.. 27,	9,	3,	1,	$\frac{1}{3}$,	$\frac{1}{9}$,	$\frac{1}{27}$...
..—3,	—2,	—1,	0,	1,	2,	3 ...

f) Es iſt einerlei, das directe Verhältniſs hinwegnehmen, und das umgekehrte hinzuſetzen (ſo auch mit der directen Wurzel dividiren, und mit der umgekehrten multipliciren). Da nun die negativen Potenzen durch Hinwegnahme des directen Wurzelverh. entſpringen, ſo kann man auch ſagen, *daſs ſie durch Hinzuſetzung des umgekehrten Wurzelverh. entſtehen.* Daraus folgt, daſs die

Einheit

Einheit zu der n-ten negativen Potenz jedes WV. m..n, das n-fache umgekehrte Wurzerverhältnifs habe.

Denn es feien z. B. die negativen Potenzen von 2 nach einander gegeben

$$\ldots\ldots \tfrac{1}{8},\ \tfrac{1}{4},\ \tfrac{1}{2},\ 1$$

fo ift das Verhältnifs 1..$\frac{1}{8}$ aus den Verhältniffen 1..$\frac{1}{2}$ + $\frac{1}{2}$..$\frac{1}{4}$ + $\frac{1}{4}$..$\frac{1}{8}$ zufammengefetzt (29, 13). Diefe drei Verhältniffe aber find gleich, weil die folgenden Glieder immer das gleiche Vielfache des vorigen find, und durch die Wegnahme des Verhältniffes 1..2, oder Hinzunahme des Verh. 2..1 = 1..$\frac{1}{2}$ fämmtlich entftehen. Alfo ift 1..$\frac{1}{8}$ = (− 1..2).3 = (2..1). 3 = (1..$\frac{1}{2}$).3. Alfo:

$$1 \,..\, \tfrac{1}{2}$$
$$1 \,..\, \tfrac{1}{2}$$
$$1 \,..\, \tfrac{1}{2}$$

$$1 \,..\, \tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{2} = 1 \,..\, \frac{1}{2^3} = 1 \,..\, \tfrac{1}{8}.$$

g) Die negativen Potenzen der Verhältniffe der gröfseren Ungleichheit, wachfen; die negativen Potenzen aber der Verhh. der kleinern Ungleichh. nehmen ab ohne Ende.

Aus diefen Sätzen folgt:

h) *Die pofitiven Potenzen des directen WV. find gleich den negativen des umgekehrten; und die negativen Potenzen des directen find = den pofitiven Potenzen des umgekehrten.*

Oder auf die Wurzel bezogen:

Die pofitiven Potenzen der directen Wurzel find = den negativen der umgekehrten Wurzel; die negativen Potenzen aber der directen Wurzel find = den pofitiven der umgekehrten Wurzel.

Das

Das ist:

$$(m..n)^{+p} = (n..m)^{-p}; \text{ und } \left.\frac{n}{m}\right)^{+p} = \left.\frac{m}{n}\right)^{-p}$$

$$(m..n)^{-p} = (n..m)^{+p}; \text{ und } \left.\frac{n}{m}\right)^{-m} = \left.\frac{m}{n}\right)^{+p}$$

zum Beispiel:

Die positiven Potenzen von 2: 1, 2, 4, 8... = den negativen Potenzen von $\frac{1}{2}$: 1, 2, 4, 8...
Die negativen Potenzen von 2: 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$... = den positiven Potenzen von $\frac{1}{2}$: 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$...

C.

Stellt man die positiven und negativen Potenzen zusammen, so erhält man eine Reihe, die nach beiden Seiten hin endlos ist. z. B. von der Wurzel 2.

$$- \quad 0 \quad +$$
$$\ldots \tfrac{1}{8}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}, 1, 2, 4, 8 \ldots$$

Die Haupteigenschaften dieser beiderseits endlosen Reihe der positiven und negativen Pott. jeder Wurzel sind:

a) Nach einer Seite wächst diese Reihe, nach der andern Seite nimmt sie endlos ab (B, e). Man mag also eine Gröfse M nehmen, welche man will, auch die Potenzen welcher Wurzel man will, so fällt M immer zwischen 2 Glieder dieser endlosen Reihe, oder ist selbst ein Glied dieser Reihe. Und zwar je mehr die Wurzel vergröfsert oder verkleinert, je eher wird M von positiven oder negativen Potenzen derselben erreicht und übertroffen.

b) Man mag aus ihr ein Glied nehmen, welches man will, so hat es zu dem folgenden dasselbe Verhältnifs, als das folgende auch zu seinem folgenden hat; nimmt man dabei die Richtung nach den positiven Potenzen zu, so

haben

haben alle nächste Glieder gegen einander das Wurzelverhältniss; nimmt man aber die Richtung nach den negativen Potenzen zu, so haben alle nächste Glieder das umgekehrte WV. gegen einander; man nehme z. B. das WV. 1..3, also die Wurzel 3, so ist die Reihe

$$\begin{matrix} & & & - & 0 & + & & & \\ \ldots\frac{1}{81}, & \frac{1}{27}, & \frac{1}{9}, & \frac{1}{3}, & 1, & 3, & 9, & 27, & 81\ldots \end{matrix}$$

Es ist aber $\frac{1}{27} .. \frac{1}{9} = \frac{1}{9} .. \frac{1}{3} = \frac{1}{3} .. 1 = 1 .. 3$ (dem WV.). Aber $27 .. 9 = 9 .. 3 = 3 .. 1 = 1 .. \frac{1}{3} = \frac{1}{3} .. \frac{1}{9} = 3 .. 1$ (dem umgek. WV.).

c) Glieder derselben, welche einerlei Entfernung von einander haben, und in derselben Richtung genommen werden, haben gegen einander einerlei Verhältniss; und zwar sind sie das sovielfache Wurzelverhältniss (das directe, wenn sie nach den positiven Pott. zu, das umgek., wenn sie nach den negativen Pott. zu genommen werden) als das vielste das andere von dem ersten an, ist. Zum B. in obiger Reihe haben $\frac{1}{3} .. 9$ und $3 .. 81$ einerlei Distanz nach den + Pott. zu, also ist $\frac{1}{3} .. 9 = 3 .. 81 = 3\,(1 .. 3)$, weil das andere Glied vom ersten an das dritte ist; $3\,(1 .. 3) = 1^3 .. 3^3 = 1 .. 27 = 13 .. 27.\,3 = 3 .. 81$. Oder $27 .. 3$ und $1 .. \frac{1}{9}$ haben gleiche Distanz nach den — Pott. zu; also ist auch $27 .. 3 = 1 .. \frac{1}{9}, = 2\,(-1 .. 3) = 2\,(3 .. 1)$, weil die andere die 2te von der ersteren an ist; $2\,(3 .. 1)$ aber $= 3^2 .. 1^2 = 9 .. 1 = 1 .. \frac{1}{9}$.

D.

Das Wurzelverhältniss kann jedes beliebige sein, also sowohl .,. als .?. Auch wenn das WV. .?. ist, erhält man bestimmte Glieder zu positiven und negativen Potenzen; denn wie sich m.?.n verhält, so kann man auch zu 1 ein Glied finden, a, dass sich ebenso 1 . ? . a verhält; auch zu a ein neues b, dass sich 1.?.a = a.?.b (8) u. s. f. ohne

Ende. Nach der allgemeinen Definition von Multipl. und Division (19) werden auch da die positiven Potenzen durch Division mit m (dem Vordergliede des WV. m.?.n) und Multiplication dieses Quotienten durch n (das Hintergl. des WV.); oder durch Multiplication mit der Wurzel $\frac{n}{m}$ gefunden; die negativen Dignitäten aber auf die umgekehrte Weise. Beide, die negativen und positiven Pott. laufen ins Unendliche; wenn die einen gröfser werden, so werden die andern kleiner; so dafs alle allgemeine Behauptungen in A, B, C, auch von den Potenzenreihen unendlicher Verhältnisse gelten, nur dafs, wenn m.?.n, auch 1.?.b, b.?.c.... kurz alle *nächste* Glieder gegen einander .?. sind. Doch wird nicht behauptet, dafs *alle* Glieder gegen *alle* in dieser Reihe .?. sein müssen, wenn das WV. .?. ist; welches erst in der Folge zu untersuchen.

Hieraus werden nun folgende allgemeine Behauptungen für die Potenzenreihen jedes möglichen, endlichen oder unendlichen Wurzelverhältnisses leicht einzusehen sein.

E)

1) Bei jedem Wurzelverhältnisse $m..n = 1..\frac{n}{m}$, ist die Wurzel $\frac{n}{m}$; die positiven Dignitäten entstehen durch Multiplication mit $\frac{n}{m}$ (oder durch Division mit $\frac{m}{n}$, 19), die negativen durch Division mit $\frac{n}{m}$ (oder Multiplication mit $\frac{m}{n}$).

2) Sowohl die positiven als die negativen Potenzen jeder Wurzel laufen ins unendliche. Wenn die Wurzel $\frac{n}{m} > 1$, also das Wurzelv. eins der $<$ Ungl., so nehmen

die

die positiven Potenzen endlos zu an Grösse, die negativen hingegen in eben dem Masse endlos ab. Ist aber die Wurzel $\frac{n}{m} < m$, also das WV eins der $>$ Ungl., so nehmen die positiven Pott. endlos ab, die negativen Pott. aber endlos zu.

3) Die positiven Pott. der directen Wurzel, $\frac{n}{m}$, d. i. des directen WVs m..n, sind die negativen der umgekehrten Wurzel, $\frac{m}{n}$, d. i. des umgekehrten WVs. m..n.

Das ist allgemein:

$$\frac{n}{m}\Big)^{+p} = \frac{m}{n}\Big)^{-p} \text{ und } \frac{n}{m}\Big)^{-p} = \frac{m}{n}\Big)^{+p}.$$

4) Je zwei nächste Glieder haben gegen einander einerlei Verhältniss, wenn sie nach einerlei Seite zu genommen werden; das ist entweder das directe WV. wenn sie nach den $+$ Pott. zu, oder das umgek. WV., wenn sie nach den $-$ Pott. zu genommen werden.

5) Beide positive und negative Pott. zusammengesetzt bilden *eine* nach zwei Seiten hin endlose Reihe, welche nach der einen Seite hin, ins Unendliche immer kleinere Glieder giebt, die jedoch nie das Nichts erreichen, nach der andern Seite hin aber in dem gleichen Masse immer grössere, welche jedoch immer endlich bleiben.

6) Alle Glieder dieser (5) endlosen Reihe welche nach einerlei Seite hin einerlei Entfernung haben, haben gegen einander das gleiche Verhältniss, welches dem directen oder umgekehrten WV. so vielemale genommen gleich ist, als das vielte Glied der Reihe das andere von dem ersteren Gliede an ist; z. B. $\frac{n}{m}\Big)^{2} .. \frac{n}{m}\Big)^{5} = \frac{n}{m}\Big)^{1} .. \frac{n}{m}\Big)^{4} = (m..n)$ $3 = \frac{n}{m}\Big)^{-7} .. \frac{n}{m}\Big)^{-4}.$

7) Da bei jedem Wurzelverhältniſs die Reihe der Potenzen ins Unendlichgroſse und Unendlichkleine (d. i. *beliebig überſchwenglich Gröſse und Kleine*) läuft; ſo iſt auch keine Gröſse M, ſo groſs oder ſo klein, daſs ihr nicht eine *beſtimmte* Potenz jeder beliebigen Wurzel gleich käme oder ſie erreichte, und unendlichviele dergleichen Potenzen ſie an Kleinheit oder Gröſse überträfen. Denn die Reihe der Potenzen erſtreckt ſich nach beiden Seiten ins Unbegrenzte. Folglich iſt M entweder ſelbſt eine Potenz von $\frac{n}{m}$, alſo $M = \frac{n}{m})^q$, oder fällt zwiſchen 2 Potenzen von $\frac{n}{m}$, das iſt $M > \frac{n}{m})^q$ aber $M < \frac{n}{m})^r$.

8) *Daraus folgt ferner, daſs man jede Gröſse M, durch lauter ganze Potenzen verſchiedener Grade, jeder beliebigen Wurzel* $\frac{n}{m}$ *entweder ganz genau, oder doch immer genauer ausdrücken könne; M möge* $>$ *oder* $<$ 1 *ſein.*

Ich will dieſe Behauptung erſt an einem Beiſpiele beweiſen, hernach den allgemeinen Beweiſs hinzufügen.

Geſetzt, es ſoll die Zahl 35 durch lauter Potenzen der Wurzel 3, d. i. des WVs 1..3 ausgedrückt werden; ſo muſs man die poſitiven Potenzen von 3 nehmen, welche ſind: 1, 3, 9, 27, 81....., die negativen ſind $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{27}$, $\frac{1}{81}$, alle < 1; 35 muſs entweder ſelbſt eine + Potenz von 3 ſein, oder zwiſchen zwei + Potenzen von 3 fallen, denn die + Potenzen von 3 wachſen ohne Ende, und werden gröſser als jede angebliche Gröſse, alſo auch > 35.

Die nächſtkleinere + Potenz von 3 an 35 iſt $27 = 3^3$, dieſe 27 iſt nur einmal in 35 enthalten, da 2 . 27 ſchon 54 iſt. Alſo faſst 35 27 oder 3^3 einmal in ſich; und läſst noch

übrig

übrig $35 - 27 = 8$; 8 ist < 35 und $< 3^3$; nun muss aus gleichem Grunde 8 entweder selbst eine + Potenz von 3, oder eine zwischen 2 + Potenzen von 3 gelegne Grösse sein, und zwar ist $3^3 > 8$, also liegt 8 innerhalb $3^0 = 1$ und 3^3; 3^2 schon 9, und 3^1 erst $= 3$; also liegt 8 zwischen 3^1 und 3^2, d. i. zwischen 3 und 9; und zwar 3^1 2mal ist $= 6$; 6 von $8 = 2$ also ist $8 = 2 . 3^1 + 2$, und 2 liegt zwischen 3^0 und 3^1, d. i. zwischen 1 und 3, und enthält in sich $2 . 3^0 = 2 . 1$. Also ist $35 = 3^3 + 2 . 3^1 + 2 . 3^0 = 27 + 6 + 2$.

Der allgemeine Beweis ist folgender:

M heisse jede beliebige Grösse; $\frac{n}{m}$ bedeute jede mögliche *endliche oder idealische* Wurzel (des Wurzelverh. m..n).

Die Potenzenreihe von $\frac{n}{m}$ erstreckt sich ins Unendliche nach beiden Seiten, und zwar wächst nach einer Seite von 1 an unendlich, und nimmt nach der andern Seite ins Unendliche ab; jenachdem nun $\frac{n}{m} >$ oder < 1. M ist entweder $>$ oder < 1. Ist $M > 1$, so muss M entweder selbst eine Potenz von $\frac{n}{m}$ nach *der* Seite zu sein, wo die immer wachsenden Potenzen von $\frac{n}{m}$ stehen, oder zwischen 2 Potenzen von $\frac{n}{m}$ fallen, so dass $M > \left(\frac{n}{m}\right)^p$ aber $M < \left(\frac{n}{m}\right)^{p+1}$. Im letzteren Falle nehme man von M so vielemal $\left(\frac{n}{m}\right)^p$ weg als möglich, wenn anders nicht schon $2 . \left(\frac{n}{m}\right)^p > \left(\frac{n}{m}\right)^{p+1}$; also ist, wenn q jede ganze Zahl bedeutet $M = q \left(\frac{n}{m}\right)^p + N$;

$+ N$; alſo der Reſt von $q \left.\frac{n}{m}\right)^p$ und M, d. i. N, $< M$. Was von M galt, gilt auch von N; N nehmlich iſt entweder ſelbſt eine Potenz von $\frac{n}{m}$ oder fällt zwiſchen zwei, ſo daſs $N > \left.\frac{n}{m}\right)^r$ aber $< \left.\frac{n}{m}\right)^s$; da nun $N < M$ ſo kann auch N nicht ſo groſs als $\left.\frac{n}{m}\right)^{p+1}$ weil ſchon $M <$ iſt als $\left.\frac{n}{m}\right)^{p+1}$. Auch iſt $N < \left.\frac{n}{m}\right)^p$, weil man ſonſt entweder noch ſo vielemale $\left.\frac{n}{m}\right)^p$ aus M hinweggenommen hätte, als möglich, oder wenn dieſs nicht angegangen wäre, (falls $\left.\frac{n}{m}\right)^{p+1} < 2 . \left.\frac{n}{m}\right)^q$,) M zwiſchen höhere Poteſtäten von $\frac{n}{m}$ gefallen wäre. Alſo fällt N wenn es nicht ſelbſt *eine* ganze Poteſtät von $\frac{n}{m}$ iſt (wo dann M durch lauter ganze Potenzen von $\frac{n}{m}$ ausgedrückt wäre) höchſtens zwiſchen $\left.\frac{n}{m}\right)^{p-1}$ und $\left.\frac{n}{m}\right)^p$ ſo daſs $N > \left.\frac{n}{m}\right)^{p-1}$ aber $< \left.\frac{n}{m}\right)^p$; wiewohl auch N zwiſchen zwei niedere Poteſtäten fallen kann. Wenn alſo N nicht ſelbſt eine niedere Poteſtät als die $p-1$-te von $\frac{n}{m}$ iſt, ſo fällt ſie zwiſchen zwei niedere Poteſtäten (in der Reihe der wachſenden Poteſtäten *niedere*) als $\left.\frac{n}{m}\right)^p$ und $\left.\frac{n}{m}\right)^{p+1}$; es ſeien dieſe niederen Poteſtäten $\left.\frac{n}{m}\right)^l$ und $\left.\frac{n}{m}\right)^{l+1}$, ſo daſs $N > \left.\frac{n}{m}\right)^l$ aber $< \left.\frac{n}{m}\right)^{l+1}$; ſo nimm aus N ſo viel ganze mal als es die Natur der Wurzel verſtattet die lte Poteſtät von $\frac{n}{m}$ heraus; ſo iſt entweder

$N =$

$N =$ mehreren ganzen Potenzen der Höhe $\left(\frac{n}{m}\right)^l$, welche jedoch $< \left(\frac{n}{m}\right)^{l+1}$, oder es bleibt ein Rest O, der $< N$, um so mehr $< M$; nehmlich $N - p . \left(\frac{n}{m}\right)^l = O$. Was von M und N galt, gilt auch von O, auch O muſs entweder selbst eine Potenz von $\frac{n}{m}$ sein, oder zwischen 2 nächste an Gröſse hineinfallen; und zwar da $O < N$, auch $< \left(\frac{n}{m}\right)^l$, so könnte O höchstens $= p . \left(\frac{n}{m}\right)^{l-1} < \left(\frac{n}{m}\right)^l$ sein; wiewohl O auch einer niederen Potenz als der $(l-1)$ · ten von $\frac{n}{m}$ gleich sein oder zwischen zwei noch niedrigere fallen kann. Ist nun O selbst einer Potenz von $\frac{n}{m}$ gleich, so ist auch M in lauter Potenzen von $\frac{n}{m}$ ausgedrückt. Denn $M = q . \left(\frac{n}{m}\right)^p + N$. N aber $= p . \left(\frac{n}{m}\right)^l + O$, und $O = \left(\frac{n}{m}\right)^c$. Also sind *alle* Theile von M in Potenzen von $\frac{n}{m}$ ausgedrückt, also auch das Ganze, M. Ist aber $O > \left(\frac{n}{m}\right)^c$ aber $< \left(\frac{n}{m}\right)^{c+1}$, so nehme man aus O so viele ganze male $\left(\frac{n}{m}\right)^c$ heraus, als möglich und die Natur der Wurzel verstattet, so geht entweder O auf, also wäre O ganz genau $p . \left(\frac{n}{m}\right)^c$, also M in lauter Potenzen von $\frac{n}{m}$ ausgedrückt; oder $O - p . \left(\frac{n}{m}\right)^c$ giebt einen neuen Rest $= P$, $< O < N < M$;

$< M$; und ſo fort ohne Ende, weil die Potenzen von $\frac{n}{m}$ rückwärts ohne Ende fortlaufen.

Weil nun die neuen Reſte immer kleiner als die vorigen werden, und alſo immer zwiſchen niedere Potenzen von $\frac{n}{m}$ fallen, ſo können dieſe Reſte, ſo wie dieſe Potenzen zwiſchen die ſie fallen, kleiner als jede angebliche Gröſse werden; alſo kann auch M, weil es der Summe aller dieſer Reſte gleich iſt, welche vorige Reſte alle, auſer dem letzten, beliebig kleinen, in lauter ganzen Potenzen (oder ganzer Potenzen *ganzen* Vielheiten) ausgedrückt ſind, immer genauer und immer genauer in ganzen Potenzen von $\frac{n}{m}$ ausgedrückt werden; wenn es auch M geben ſollte, wo man bei irgend einer Wurzel $\frac{n}{m}$ und irgend beſtimmtem M ins Unendliche neue Reſte erhielte.

Man kann alſo dieſen allgemeinen Satz, wenn der Kürze wegen für $\frac{n}{m}$ w geſetzt wird, allgemein ſo ausdrücken:

$$M = pw^q + pw^{q-a} + pw^{q-a-b} \ldots\ldots + pw^{q-a-b-c}$$

oder im andern Falle:

$M = pw^q + pw^{q-a} + pw^{q-a-b} \ldots\ldots$ wo p alle ganze Zahlen auch Null (übrigens nach Befinden der Wurzel); q jede ganze Zahl, und auch a und b jede ganze Zahl bedeuten.

Iſt $M < 1$, ſo wird der Beweiſs auf ähnliche Art geführt.

F)

Die übrigen zu Anfang dieſes § characteriſirten Reihen können in dieſem Grundriſs ſchon darum nicht betrach-

tet

tet werden, weil sie, wegen der symmetrischen und organischen Natur der mathematischen Welt und Erkenntniss hier noch nicht construirt werden können. Wiewohl sie alle die gröſste Aufmerksamkeit und das tiefste Studium verdienen; da überhaupt die Betrachtung der Reihen, als der Organisationen der Verhältnisse, nach der Betrachtung der Verhältnisse und einzelnen Proportionen, sich am weitesten erstreckt.

32.

Die Reihe der Zahlen, der ganzen und der gebrochnen, läuft (10) ins Unendliche; sollte also jede Zahl einen besonderen Namen und besonderes Zeichen (*Zifer*) haben, so brauchte man dergleichen unendlichviele; selbst wenn man sich bei einer bestimmten Gröſse von Zahl begnügen wollte, bei weitem mehrere, als man merken könnte und möchte. Daher ist es für die Anwendung der Arithm. nicht nur, sondern selbst für die weitere Construction der Wissenschaft, eine unerläſsliche Aufgabe, durch so wenig Worte und Zeichen als möglich, und wegen anderen Rücksichten thunlich, auf eine kurze, bezeichnende und leicht faſsliche Art, alle Zahlen, ganze und gebrochne, auszusprechen und zu schreiben. (Selbst für diejenigen Vielheiten, welche keine Zahlen sind (17, b), bedarf man einer bestimmten und leicht faſslichen Characteristik). Hierzu bietet sich aus dem vorigen § der kürzeste und beste Weg im allgemeinen dadurch dar: *daſs sich alle Gröſsen jeder Einheit, also auch alle Zahlen, durch lauter ganze Potestäten jeder beliebigen Wurzel, entweder ganz genau oder doch so genau, als man will, ausdrücken lassen.* Man wähle also ein für allemal eine beliebige Wurzel, als deren Potestäten, ohne nöthig zu haben es weiter zu erinnern, ausgedrückt werden, und benenne und schreibe danach jede Zahl. Hierdurch wird ein bestimmtes, beliebiges *System der Zahlenausdrückung* (*Zahlensystem*) entstehen, welches durch die

Wurzel

Wurzel, als deren Potenzen dann alle Zahlen genannt und geschrieben werden, vollkommen bestimmt ist.

A)

Zuerst wollen wir betrachten wie hierdurch auf die bequemste Weise alle *ganze* Zahlen ins Unendliche genannt und bezeichnet werden können.

1) Nimmt man irgend eine ganze Zahl zur Wurzel, so sind die positiven Potenzen die steigenden; und lauter ganze Zahlen, weil ganze Vielfache ganzer Zahlen aus lauter ganzen Einheiten bestehen. Sie steigen um so schneller, je grösser die Wurzel (31, A).

2) Wenn man eine ganze Zahl von einer ganzen Zahl abzieht (wegnimmt), so ist der Rest wieder eine ganze Zahl; weil die Einheit sowohl den Minuendus als Subtrahendus misst.

3) Ist also irgend eine ganze Zahl, M, gegeben, so läßst sich dieselbe aus lauter ganzen positiven Potenzen, mit Hülfe der 0-ten Potenz, $= 1$ (S.249.) zusammensetzen (31, E, 8 u. A, 1 und 2 d. §). Es sei z. B. die Wurzel 2 gegeben, so läfst sich jede ganze Zahl aus lauter $+$ Potenzen der 2 zusammensetzen. Um die Höhe der Potenzen kurz zu bezeichnen, sollen sie aus der Zahl der Stelle beurtheilt werden, in welcher sie von der Rechten nach der Linken stehen; 1 soll im allgemeinen das Zeichen sein, dafs die Potenz der Stelle, worin 1 steht, einmal genommen werde; 0 soll die leeren Stellen *blos als Stellen* bedeuten; in der ersten Stelle aber soll $2^0 = 1$ stehen. So ist nach dieser Bezeichnung

$2^0 = 1$ $\quad$ $2^2 = 100 =$ vier

$2^1 = 10 =$ zwei $\quad$ $2^3 = 1000 =$ acht

u. s. f. ohne Ende.

also

alſo der Anfang der Ausdrücknng aller ganzen Zahlen von 1 an nach dieſem Syſteme der Wurzel 2 (*dem dyadiſchen Zahlenſyſteme*):

1, eins.	111, ſieben.
10, zwei.	1000, acht.
11, drei.	1001, neun.
100, vier.	1010, zehn.
101, fünf.	1011, eilf.
110, ſechs.	1100, zwölf.

u. ſ. f. ohne Ende;

woraus auch, wiewohl es allgemein in 31, E, 8 bewieſen, hervorgeht, daſs jede Zahl ſo ausgedrückt werden kann, weil man allemal die um eins gröſsere aus der letzten bilden kann.

Dieſs Syſtem hat die Bequemlichkeit, daſs man keiner weiteren Zifern als 1 und 0 bedarf; aber die Unbequemlichkeit, daſs, weil die + Pott. der 2 unter allen Wurzeln, welche ganze Zahlen ſind, am wenigſten wachſen, bei eben nicht groſsen Zahlen, ſchon ſehr viele Stellen und Namen derſelben erfordert werden.

Wer nach dieſem daydiſchen Syſteme alle Zahlen nennen wollte, der müſste jeder dyadiſchen Potenz einen beſtimmten kurzen Namen geben; ſetze z. B. 1 hieſse ba, 2 ka, 4 da, 5 fa, 16 la, 32, ma u. ſ. fort; ſo hieſse z. B. 1 ba, 2 ka, 3 kaba, 4 da, 5 daba, 6 daka, 7 dakaba, 8 fa, 9 faba u. ſ. w. Darin beſteht aber eben die Unbequemlichkeit dieſes Syſtems, daſs man bei nicht eben groſsen Zahlen, ſo viele Potenzennahmen merken muſs. Daher es nicht zu empfehlen. Daſs die Bedeutung der Stellen nach der horizontalen Richtung nach Links wächſt, iſt willkührlich, aber bequem. In alten Chineſiſchen Schriften, welche Leibnitz enträthſelte, fand ſich folgende Bezeichnung des dya-

dyadischen Systems, dass die 1 durch —— und o durch — — bedeutet wird; Fig. 64.

4) Nimmt man zur Wurzel des Systems 3 an (*triadisches Zahlensystem*), so bedarf man zu derselben ganzen Zahl M schon weniger hohe Potestäten, als im dyadischen Systeme, da die + Potestäten von 3 mehr wachsen, als die von 2. Da nun aber 2mal eine jede Potestät von 3 in M vorkommen kann (31, E, 8), so bedarf man schon 3 Zifern; 1, 2 und o als Zeichen der leeren Stellen. Bezeichnet man die Höhe der Dignitäten wieder wie in dyadischen; so ist:

$1 = 3^0$, eins.	$100 = 3^2$ neun.
$10 = 3^1$, drei.	$1000 = 3^3$ 27.

Und die ersten 12 Zahlen nach diesem Systeme sind:

1, eins.	21, sieben.
2, zwei.	22, acht.
10, drei.	100, neun.
11, vier.	101, zehn.
12, fünf.	102, eilf.
20, sechs.	110, zwölf.

Giebt man nun den triadischen Potenzen bestimmte Namen, so kann man auch nach diesem Systeme alle ganze Zahlen benennen.

5) Nimmt man zur Wurzel 4 an (im *tetradischen Systeme*) so braucht man zu demselben M, schon weniger hohe Potenzen der Wurzel, dafür braucht man aber schon vier Zeichen 1, 2, 3, o; nach diesem Systeme heissen die ersten 12 Zahlen

1, eins.	11, fünf.	21, neun.
2, zwei.	12, sechs.	22, zehn.
3, drei.	13, sieben.	23, eilf.
10, vier.	20, acht.	30, zwölf.

6)

6) Nimmt man 5 zur Wurzel des Syſtems an, ſo erhält man das *pentadiſche*, 6 das *hexadiſche*, 7 das *heptadiſche*, 8 das *octadiſche*, 9 das *enneadiſche*, 10 das *decadiſche*, oder *decimale*, 11 das *hendecadiſche*, 12 das *dodecadiſche* oder *duodecimale* 60 das *ſexageſimale* oder *hexacontadiſche*, 100 das *centeſimale* oder *hecatontadiſche*..... *Syſtem*. In der Natur der Sache liegt gar kein Grund, hierin irgendwo ſtehen zu bleiben; die Beſtimmungsgründe der Wahl irgend eines Syſtems ſind, ſo viel ihrer hier beurtheilt werden können, folgende:

a) Die Wurzel darf weder zu groſs noch zu klein ſein; denn eine kleine Wurzel macht zwar wenig Zifern nöthig (*da jede Wurzel n, auch n Zifern erfordert*), aber viele Namen von den Poteſtäten (Stellen); weil bei nicht eben groſsen Zahlen ſchon hohe Poteſtäten einer ſolchen Wurzel vorkommen; eine groſse Wurzel aber macht zwar weniger Stellennahmen zu merken nöthig, aber deſto mehr Zifern, welches letztere noch weit unbequemer für das mechaniſche Rechnen iſt, als das erſtere. Die Bequemlichkeit liegt alſo in der Mitte, und in dieſer Abſicht möchte das decimale oder duodecimale (dodecadiſche) Syſtem das bequemſte ſein.

b) Je in mehr gleiche Theile, ſo daſs ganze Quotienten entſpringen, die Wurzel kann getheilt werden, und je mehr die Theiler der Wurzel der Reihe, 1, 2, 3, 4.... nach einander gleich kommen, je bequemer iſt das Syſtem; aus Gründen die in d. § B deutlich werden. In dieſer Rückſicht iſt das decimale Syſtem weniger vollkommen, als das duodecimale; denn 12 wird getheilt durch 2, 3, 4, *, 6; 10 aber nur durch 2, *, *, 5. Dafür aber bedarf auch das dodecadiſche Syſtem 2er Zifern mehr, der einen für *zehn*, der anderen für *eilf*. Dieſer Vorzug aber des dodecadiſchen Syſtems iſt nicht ſo bedeutend, daſs es ſich der Mühe und

Con-

Confusion lohnte, das allgemeingebräuchliche, überall *brauchbare* decimale System auszurotten.

Ich beschreibe jetzt nur noch genauer, das *decadische*, *dodecadische* und *sexagesimale* Zahlensystem.

7) *Das decadische Zahlensystem*

ist wohl bei allen cultivirten Völkern in Gebrauch; es bedarf blos 10 Zeichen

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

und der Namen für die decadischen Potestäten; die Stellen werden ebenfalls in ihrer steigenden Höhe von der Rechten nach der Linken beurtheilt. Die Namen der Stellen sind: 10^1 Zehn, 10^2 Hundert, $10^3 = 1000$ Tausend; $10^4 =$ 10000 Zehntausend; $10^5 = 100000$ Hunderttausend; $10^6 = 1000000$ Tausendmaltausend oder Million (*ein grosses Tausend*) 10^{12} Billion, $10^{18} = 10^{3 \cdot 6}$ Trillion; $10^{24} = 10^{4 \cdot 6}$ Quadrillion $10^{n \cdot 6}$ N-tillion. Soll daher folgende Zahl decadisch ausgesprochen (*numerirt*) werden

$\dot{1}752342\dot{2}987523$

so mache man sich Puncte an 10^6 in der siebenden, $10^{2 \cdot 6}$ in der 13-ten, Stelle; und fange von der grösten Stelle an, welche ist: 1 *Billion*, 752342 siebenhund. u. zwei und funfzig tausend, drei hundert und zwei und vierzig *Millionen* u. s. w.

Die decadischen Potenzen wachsen ungeheuer; man suche also durch bestimmte Anschauung die Grösse eines *Tausend*, einer *Million*, *Billion* zu würdigen. Wie lange müsste man zählen um eine Million, oder Billion abzuzählen? wie gross die Fläche sein, auf der eine Million oder Billion Sandkörner Platz haben sollen?

8) *Das dodecadische Zahlensystem*

bedarf 12 Zifern, etwa

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, υ, ω;

seine

ſeine Potenzen wachſen aber ſchneller, als die des decadiſchen Syſtems. Die Potenzen heiſsen

	decadiſch	dodecadiſch
12^0 =	1	1
12^1 =	12	10
12^2 =	144	100
12^3 =	1728	1000
12^4 =	20736	10000

die Zahlen von 12 bis 24 aber ſind:

10 = 12	14 = 16	18 = 20
11 = 13	15 = 17	19 = 21
12 = 14	16 = 18	1υ = 22
13 = 15	17 = 19	1ω = 23

9) *Das Sexageſimalſyſtem*

bedürfte eigentlich 60 beſtimmter Zifern; wobei man ſich dadurch geholfen hat, daſs man je zwei Stellen für eine wiederum ſetzt, und ſich in den beiden Stellen, die für eine geſetzt werden, des Decimalſyſtems bedient. Die Sexageſimalſtellen muſs man alſo durch irgend ein Zeichen , ; . - unterſcheiden; - ſcheint mir das beſte.

Die erſten 59 Zahlen alſo dieſes Syſtems haben einerlei Ausdruck mit decimalen. Nun folgen:

1 - 00 = 60	2 - 00 = 120 = 2 . 60
1 - 01 = 61	2 - 01 = 121
1 - 02 = 62	2 - 02 = 122
.	
1 - 59 = 119	2 - 59 = 179

Dieſs Syſtem hat weiter nichts empfehlendes als: ſeine Anwendung auf die gewöhnliche Berechnung der Zeit, und die vollkommne Theilbarkeit ſeiner Wurzel durch 1, 2, 3, 4, 5, 6, *, *, *, 10, 12, 15, 20, 30, woran es das Zwölfer und Dreiſsigerſyſtem noch übertrifft.

10) Zur Vergleichung und Ueberſetzung dieſer Syſteme in einander, bedarf man einer Tafel der Potenzen aller Zahlen bis 12; die ich, weil ſie ſonſt als Rechentafel oft gebraucht wird, und das Steigen der Potenzen vergleichbar darſtellt, herſetze:

2	3	4	5	6	
4096	531441	16777216	244140625	2176782336	XII
2048	177147	4194304	48828125	362797056	XI
1024	59049	1048576	9765625	60466176	X
512	19683	262144	1953125	10077696	IX
256	6561	65536	390625	1679616	VIII
128	2187	16384	78125	279936	VII
64	729	4096	15625	46656	VI
32	243	1024	3125	7776	V
16	81	256	625	1296	IV
8	27	64	125	216	III
4	9	16	25	36	II

7	8	9	
13841287201	68719476736	282429536481	XII
1977326743	8589934592	31381059609	XI
282475249	1073741824	3486784401	X
40353607	134217728	387420489	IX
5764801	16777216	43046721	VIII
823543	2097152	4782969	VII
117649	262144	531441	VI
16807	32768	59049	V
2401	4096	6561	IV
343	512	729	III
49	64	81	II

11	12	
3138428376721	8916100448256	XII
.285311670611	.743008370688	XI
..25937424601	..61917364224	X
...2357947691	...5159780352	IX
....214358881	429981696	VIII
.....19487171	35831808	VII
......1771561	2985984	VI
.......161051	248832	V
........14641	20736	IV
.........1331	1728	III
..........121	144	II

B.

1) Wenn man irgend eine ganze Zahl zur Wurzel nimmt, so nehmen die negativen Dignitäten ins Unendliche (S. 255. g) ab ohne je Nichts zu erreichen; je kleiner die Wurzel je weniger, je gröſser die Wurzel je mehr. Bei jeder solchen Wurzel alſo kann man eine kleinere Gröſse erhalten, als jede angebliche iſt. Da nun ferner (S. 260. 8) gezeigt worden iſt, daſs *jede* Gröſse wenigſtens in unendlicher Näherung durch lauter Potenzen einer *jeden* Wurzel ausgedrückt werden könne: ſo folgt, daſs auch jeder mögliche Bruch (jede mögliche Bruchgröſse (9)) nach Potenzen jeder Wurzel, welche eine ganze Zahl iſt ausgedrückt werden könne. Daſs es unendlich viele Brüche giebt, welche ganz genau in ſolchen Potenzen ausgedrückt werden können, iſt gewiſs, weil, wenn die Wurzel eine ganze Zahl, die negativen Potenzen ſelbſt Brüche der Form $\frac{1}{n}$ ſind. Ob es aber ebenfalls unendlich viele Brüche gebe, die ſich nur durch unendliche Näherung in einem oder dem anderen Syſtem, oder überhaupt in jedem Syſtem ausdrücken laſſen, muſs die Folge der Unterſuchung lehren. Ein Bruch, der in negativen Potenzen irgend einer Wurzel ganz genau

oder

oder näherungsweise ausgedrückt ist, heisst ein Systembruch, im Gegensatz eines solchen Bruches, der auf die gewöhnliche Art (9) benannt ist. Im dyadischen Systeme heisst er ein *dyadischer*, ... im decadischen ein *decadischer* oder *Decimalbruch*, er mag nun > oder < 1 sein.

2) Da die negativen Potenzen stetig in demselben Verhältnisse fortgehen, als die positiven Potenzen rückwärts betrachtet, so kann man sie auch eben so nach den Stellen von der Einheit aus nach rechts unterscheiden, wobei die Stelle der Einheit durch ein rechts an sie gesetztes Comma oder anderes Zeichen bemerkt werden muss, weil man sonst die Grösse der Potestäten nach der absoluten Einheit nicht würdigen kann. Dyadisch also heisst

$0,1 = 2^{-1} = \frac{1}{2}$ $\quad$ $0,001 = 2^{-3} = \frac{1}{8}$

$0,01 = 2^{-2} = \frac{1}{4}$ $\quad$ $0,0001 = 2^{-4} = \frac{1}{16}$

Und die ganze Reihe aller Potenzen der 2

$$\ldots 1111,111\ldots$$
$$+ \quad -$$

Triadisch heisst:

$0,1 = 3^{-1} = \frac{1}{3}$ $\quad$ $0,001 = 3^{-3} = \frac{1}{27}$

$0,01 = 3^{-2} = \frac{1}{9}$ $\quad$ $0,0001 = 3^{-4} = \frac{1}{81}$

Und z. B. $0,12 = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} = \frac{5}{9}$

$0,202 = \frac{2}{3} + \frac{2}{27} = \frac{20}{27}$

$10,021 = 3 + \frac{2}{9} + \frac{1}{27} = 3 + \frac{7}{27}$

Decadisch heisst:

0,1 Ein Zehentheil. $\quad$ 0,001 ein Tausendth.

0,01 Ein Hundertth. $\quad$ 0,0001 ein Zehentausendth.

Und daher z. B.

0,235 = 2 Zehentheile, und 3 Hunderttheile, und 5 Tausendtheile.

Dode-

Dodecadisch heisst:

$0{,}1 = \frac{1}{12}$

$0{,}01 = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{144}$.

Also z. B.

$53{,}12 = 60 + 3 + \frac{1}{12} + \frac{2}{144}$ nach dem Decimalsysteme.

Nach dem *Sexagesimalsysteme* heisst:

$00{,}01 = \frac{1}{60}$ decadisch.

$00{,}00 \cdot 01 = \frac{1}{60} \cdot \frac{1}{60} = \frac{1}{3600}$ decadisch.

Also z. B.

$53{,}07 \cdot 59 = 53 + \frac{7}{60} + \frac{59}{3600}$ decadisch.

3) Ich bemerke zuförderst die allgemeinen Eigenschaften dieser nach beiden Seiten hin unendlichen Potenzenreihen in jedem bestimmten Systeme. Wenn man sie nach einer und derselben Richtung hin durchläuft, so haben je zwei Glieder gegen einander dasselbe Verhältniss, als je 2 andere auch gegen einander haben, welche in gleicher Entfernung stehen (31, c) d. i. zwischen denen gleichviel Stellen sind. Also z. B. im decadischen Systeme ist 1 . . 10 = 10 . . 100 = 1000 . . 10000 = 0,1 . . 1 = 0,001 . . 0,01. Ferner 1 . . 100 = 10 . . 1000 = 1000 . . 100000 = 0,1 . . 10 = 0,01 . . 1. Da sich gleiche Vielheiten wie die Einheiten verhalten (S. 177), so ist auch z. B. im decadischen Systeme 2 . . 20 = 20 . . 200 = 200 . . 2000 = 0,2 . . 2 = 0,02 . . 0,2; also auch durch Zusammensetzung (22, 1, β) z. B. 99 . . 990 = 990 . . 9900 = 9,9 . . 99 = 0,99 . . 9,9; oder auch: 23 . . 230 = 230 . . 2300 = 2,3 . . 23; oder auch: 2337 . . 23370 = 23,37 . . 233,7. Das ist allgemein:

Wenn in irgend einer Systemzahl die Stelle der absoluten Einheit, um eine, zwei, ... n Stellen nach der Rechten verrückt wird, die Ziffern aber gegen einander einerlei

Stellen behalten: ſo wird dieſe Syſtemzahl einmal, zweimal, ... n-mal nach einander mit der Wurzel des Syſtems multiplicirt; geſchieht aber die gleiche Verſetzung der Stelle der abſoluten Einheit nach der Linken zu, ſo wird die Syſtemszahl ſo vielmal nach einander durch die Wurzel des Syſtems dividirt.

Denn dadurch werden alle Ziffern in allen Stellen auf gleiche Art wie die abſolute Einheit verändert; was aber von *allen* Theilen eines Ganzen gilt, gilt auch von dem Ganzen, alſo auch hier von der ganzen Syſtemzahl, was von allen ihren Theilen gilt.

Z. B. im dyadiſchen Syſtem iſt

$101 = 5$ aber $1010 = 10$, und $10{,}1 = \frac{5}{2}$. Oder: $1101 = 13$ aber $1{,}101 = \frac{13}{8}$.

Im decadiſchen Syſteme

$7245 \cdot 10 = 72450$; aber $7245 : 10 = 724{,}5$; $0{,}57 \cdot 100 = 57$. Oder: $32{,}59 : 100 = 0{,}3259$. Hingegen $32{,}59 \cdot 100 = 3259$.

Bei ganzen Zahlen geſchieht dieſe Multiplication durch Hinzufügen von eben ſo vielen Nullen; bei gebrochnen aber durch Verſetzung des Comma um ſo viel Stellen nach Rechts. Bei ganzen Zahlen geſchieht dieſe Diviſion durch das Weglaſſen ſo vieler Nullen, oder wenn die Stellen erfüllt ſind, durch Setzen des Comma um ſo viel Stellen nach Links (z. B. $3725 : 100 = 37{,}25$); bei gebrochnen aber ebenfalls durch Hinaufrückung des Comma.

Es iſt klar, warum das Daranſetzen der Nullen rechts nach dem Comma nichts im Werthe verändert.

b) Daraus entſpringt die Bequemlichkeit, daſs man jede Syſtemzahl als ganze Zahl jeder beliebigen Potenz der Wurzel des Syſtems anſehen und ausſprechen kann. So

z. B.

z. B. dyadiſch, heiſst 110,1 1 Vierfaches, 1 Zweifaches und 1 Halbes; oder: $6 + \frac{1}{2} = \frac{13}{2} = \frac{26}{4}$. Decadiſch heiſst:

$25{,}72 = 25$ Ganze $\frac{7}{10} + \frac{2}{100}$; oder 25 Ganze $+ \frac{72}{100}$; oder 2 Zehner und $\frac{572}{100}$; oder $\frac{2572}{100}$; oder 2 Zehner $+ \frac{57}{10} + \frac{2}{100}$.

c) In jedem Syſteme kann man von irgend einer Potenz an, in jede Stelle die höchſtmögliche Ziffer ſetzen, und doch ſind alle dieſe Ziffern zuſammengenommen, ſo bald man abbricht, noch nicht *genau genommen* ſo groſs als 1 in der nächſthöheren Stelle.

Z. B. dyadiſch iſt $1 > 0{,}11111$

denn nimmt man 0,1, ſo fehlt noch $\frac{1}{2}$, weil $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$; nimmt man hinzu 0,01, ſo fehlt noch $\frac{1}{4}$, weil $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$, alſo iſt $0{,}11 < 1$ und fehlt noch $\frac{1}{4} = 0{,}01$; nimmt man dazu $0{,}001 = \frac{1}{8}$, ſo fehlt noch $\frac{1}{8}$, denn $0{,}1 + 0{,}01 + 0{,}001 + 0{,}001 = 1$ u. ſ. f. ins Unendliche.

Oder decadiſch iſt $99{,}9999 < 100$. Denn $90 + 10 = 100$; nimmt man 9 in der nächſten Stelle dazu, ſo fehlt *eins* an 10; alſo fehlt an 99 noch 1 um 100 = zu ſein; nimmt man 9 in d. n. St. hinzu = 0,9, ſo fehlt noch 0,1; alſo iſt 99,9 um ein Zehntheil kleiner als 100; u. ſ. f. ins Unendliche.

Je mehr man Stellen hinzu nimmt, deſto mehr nähert man ſich dem Werthe von 1 in der nächſt höheren Stelle; und zwar nimmt der Fehler immer nach dem umgekehrten Wurzelverh. des Syſtems ab; z. B. bei 99,999999 fehlt nur 0,000001, ſo wäre es = 100.

Denkt man ſich dieſe Reihen *wirklich* unendlich, ſo ſind ſie = 1 in der nächſt höheren Stelle; ſo bald ſie aber abgebrochen werden, fehlt immer noch etwas, welches jedoch ſo klein werden kann, als man immer will. Wenn

aber

aber gleich diefe Reihen ohne Ende (unendlich) find, fo ift doch ihr Gehalt endlich, weil in ihnen ohne Ende etwas zu endlicher Summe fehlt; welches um fo weniger zu verwundern, weil jede ftetige Gröfse ins Unendliche theilbar ift (12); indem dergleichen unendliche Reihen, deren Summe endlich, eine realifirte und ftetige unendliche Theilung ftetiger Gröfsen enthalten. Auch ift zu bedenken, dafs auch fobald der Gehalt diefer Reihen unendlich (*unermefslich*) wird, als fie auch nach der andern Seite hin endlos gefetzt werden (31).

d) Alle Zahlen eines und deffelben Syftems find unter einander, *nur als ganze Zahlen einer* und derfelben beftimmten Potenz der Wurzel des Syftems *vergleichbar:* denn fie find *ganze* Wiederholungen diefer Potenz der Wurzel als ihres gemeinfamen Mafses; z. B. 3 und 0,5 werden beide gemeffen durch 0,1; denn 3 = 3,0 dreifsig Zehntheilen, und 0,5 = 5 Zehnth. Oder 32,5 und 7,234 werden gemeffen durch 0,001; denn 32,5 = 32.500 oder 32500 Taufendtheilen — (Der allgemeine Beweifs hiervon liegt in den §. und §. 20. S. 150.). Es wäre alfo fehr vortheilhaft, wenn man alle Zahlen, auch alle gebrochnen, als Syftemzahlen des gewöhnlichen Syftems (als Decimalzahlen) ausdrückte, auch die Näherungszahlen unendlicher Verhältniffe (17 b. S. 131 f.). Durch Näherung laffen fich gewifs alle ausdrücken (31); kann es aber nicht gebrochne Zahlen geben, welche für ein beftimmtes Zahlenfyftem nur durch endlofe Näherung ausgedrückt werden können? und welcherlei find dergleichen Zahlen für ein beliebiges Syftem? Ifts möglich, dafs wenn $\frac{m}{n}$ im n-adifchen Syfteme nicht genau ausdrückbar, es doch in anderen Syftemen genau ausgedrückt werden könne, u. f. w.? So z. B. wird in der Folge gezeigt werden, dafs decadifch der Bruch $\frac{1}{3}$ = 0,333 ... $\frac{2}{3}$ = 0,666; oder dyadifch d. B. $\frac{1}{3}$ = 0,0101

Diefe

Diefe wichtigen Unterfuchungen können nur dann angeftellt werden, wenn die Natur der Brüche und die Natur der ganzen Zahlen in Abficht ihrer Theilbarkeit durch andere ganze Zahlen (die *Lehre von Factoren und Primzahlen*) bekannt ift. Weil in diefem erften Bande von letzterem nicht gehandelt werden kann, fo verweife ich indefs auf die meinen *Factoren und Primzahlentafeln bis* 100000 Jena bei Gabler 1804 vorausgefchickte Abhandlung darüber.

C.

Nunmehr kann gezeigt werden, wie in jedem Zahlenfyfteme alle Syftemzahlen mit einander *addirt*, *fubtrahirt*, *multiplicirt*, *dividirt* werden können, ohne dafs man an die Einheiten, die alle in den Ziffern enthalten find, denken mufs.

a) Alle Fälle der Addition und Subtraction kommen darauf hinaus, dafs man die Summe beliebig vieler Zahlen von gleichen Zeichen und den Unterfchied zweier Zahlen nach einem beliebigen Zahlenfyfteme finden könne. Es ift alfo die erfte Aufgabe:

Die Summe zweier oder mehrerer Zahlen nach jedem beliebigen Syfteme zu finden;

Wenn man alle Theile einer Gröfse zu allen Theilen der andern nimmt, fo erhält man das Gleiche, als wenn man die Ganzen zufammen fetzt. Wenn alfo die zu addirenden Poften A, B, C find, und ihre Summe C gefucht wird; fo darf man nur alle Theile, d. i. alle Zifern von B zu A, und dazu auch alle Zifern von C nehmen; die Zifern aber find nicht anders zufammenrechenbar, als wenn fie von derfelben Einheit (7), alfo von der gleichen Dignität der Wurzel des Syftems find, alfo in gleich hohen Stellen ftehen; daher mufs man erft A, B, C fo unter einander

fetzen,

ſetzen, daſs die gleichen Syſtemſtellen unter einander kommen. Hernach fange man von den niederſten Stellen an, und wenn die Zifern in einer niederen Stelle zuſammen mehr als 1 in der nächſten betragen, ſo drücke man dieſe Theile in Zahlen der nächſten Stelle aus (rechne ſie in der nächſten Stelle hinzu).

Z. B. *dyadiſch:*

101101 A	10,1011 A
1101 B	0,0101 B
10010 C	111 C
1001100 S	1010,0000 S = 1010

decadiſch	ſexageſimal
358,907	45 - 07, 03 - 55
207,4309	39 - 00, 90 - 37
9000,7	00, 00 - 01
9567,0379	01 - 24 - 08, 34 - 33

Um den Unterſchied zweier Zahlen nach jedem beliebigen Syſteme zu finden,

ſchreibe die kleinere Zahl unter die gröſsere, ſo daſs gleiche Einheiten untereinander kommen, und nimm die einzelnen Theile der kleineren, von der niederen Stelle fortſchreitend, von den gleichſtelligen Zifern der gröſseren Zahl hinweg. Die gröſsere Zahl (der *Minuendus*) heiſse A, die kleinere (der *Subtrahendus*) B, der Unterſchied beider (der *Reſt*) heiſse R. Z. B.

dyadiſch	*decadiſch*	*ſexageſimal*
11101 A	95327 A	56 - 05, 07
1101 B	2106 B	23 - 01, 02
10000 R	93221 R	33 - 04, 05

dyadiſch

dyadiſch	*decadiſch*	*ſexageſimal*
101,101 A	57,32 A	37 - 56,59 A
100,001 B	36,3 B	55 B
1,100 R	21,02 R	37 - 01,59 R

Iſt die darüber ſtehende Zifer kleiner als die wegzunehmende, ſo betrachte man in A 1 in der nächſt höheren Stelle als Einheiten in der vorigen Stelle; alſo im dyadiſchen S. als 2 in der vorigen, im decadiſchen als 10, im ſexageſ. als 60; dieſe Herübernahme aber bemerke man durch ein Punkt an der verringerten nächſten Stelle, damit man die ſchon berechnete Einheit nicht nochmals berechne, wobei der Minuènd zu groſs geſetzt würde; z. B.

1011,01 A	9231,91 A	33 - 01,52 A
110,11 B	923,89 B	09 - 37,39 B
100,10 R	8308,02 R	23 - 24,13 R

Steht aber in den nächſten Stellen nichts, ſo gehe man bis auf die erſte fort, in welcher eine Zifer; nehme eins hinweg, und nehme immer ſo fort eins weg, bis man auf die Stelle kommt, wo abzuziehen iſt. Dadurch werden alle zwiſchenſtehende leere Stellen mit der höchſten Zifer des Syſtems erfüllt; der Beweiſs fällt aus C in die Augen.

11000,11 A	9000,75 A
1111,10 B	927 B
1001,01 R	8073,75 R
denn	denn
1000 = 111 + 1 C	8999 + 1 = 9000 C
= 110 + zwei	= 8990 + zehn

59 - 00,01 A	denn 58 - 59,60 =
00,57 B	58 - 59 + $\frac{60}{60}$ =
58 - 59,04 R	59 - 00,00 C

Dieſe Addition und Subtraction dienen ſich wechſelſeits zur Probe (15).

Allerdings kann von dieſen beiden Operationen die erſte Addition und die andere Subtraction heiſsen; nur muſs man nicht denken, daſs *überhaupt* bei jeder Addition gleiche Zeichen, bei jeder Subtraction ungleiche Zeichen, und der Minuendus gröſser als der Subtrahendus ſein müſſe (13b und 14).

b) Alle Fälle der Multiplication und Diviſion (11, 19) können aufgelöſst werden, wenn man von jeder Zahl ihr ganzes beliebiges Vielfaches, und ihren beliebigvielten Theil conſtruiren, d. i. wenn man ganze Zahlen durch ganze Zahlen multipliciren und dividiren kann. Die erſte Aufgabe iſt alſo:

Eine jede ganze Zahl mit jeder ganzen Zahl nach einem beliebigen Syſteme zu multipliciren.

Wenn man alle Theile des Multiplicands mit allen Theilen des Multiplicators producirt (multiplicirt) und dieſe Theile alle addirt, ſo erhält man das ganze Product (11, 19). Alſo allgemein

$$(a+b+c).(d+e) =$$

$$\begin{array}{r} a+b+c \\ d+e \\ \hline ae+eb+e^2 \\ ad+bd+cd \end{array} \qquad \text{oder ein ander Beiſpiel} \qquad \begin{array}{l} (a+b).(a+b) = \\ \hline \quad ab+b^2 \\ a^2+ab \\ \hline a^2+2ab+b^2. \end{array}$$

Wenn demnach z. B. a, b, c, d, e, f.... Zifern in decadiſchen Stellen bedeuten, ſo iſt

$$(dcba).(fe) = (ea) + (eb)o + (ec)oo + (ed)ooo + fo.a + fo.bo + fo.coo + fo.dooo.$$

Das

Das iſt, man muſs auf den Syſtemswerth der Zifern die gehörige Rückſicht nehmen. Denn jede Syſtemszahl hat die Wurzel des Syſtems ſo vielmal als Factor an ſich, als Nullen hinter ihr ſtehen; daraus werden folgende Beiſpiele ſich ſelbſt erklären:

dyadiſch

11101 .		11101 . 1011
1011		11101
11101		11101
111010	oder kürzer:	11101
000000		100111111 P
11101000		
100111111		

decadiſch

3983 .		
509		3983 . 509
35847	oder kürzer:	35847
00000		19915
1991500		2027347 P
2027347 P		

Sexageſimal

25 - 03 . 11 - 15

06 - 16 - 35

04 - 35 - 33 - 00

04 - 41 - 49 - 35 P

Zwiſchen den Strichen ſtehen die Partialproducte, in P ihre Summe alſo das Totalproduct.

Wenn

Wenn die beiden Factoren auch Syſtembrüche (S. 273) ſind, ſo kann man nach eben dieſen Regeln ſie mit einander multipliciren, wenn man nur dabei den decadiſchen Werth der Zifern bedenkt. Soll nehmlich eine ganze Zahl, G, durch $\frac{1}{10} = 0,1$ multiplicirt werden, ſo heiſst dieſs, man ſoll von G den 10ten Theil einmal nehmen; man darf alſo nur in G die Stelle der abſoluten Einheit (das Comma) um eine Stelle links ſetzen (S. 276). Alſo iſt z. B. $37254 \cdot 0,1 = 3725,4$. Soll alſo G z. B. durch $\frac{3}{10} = 0,3$ mult. werden, ſo muſs man erſtlich von G den 10ten Theil ſuchen, das iſt das Comma um eine Stelle weiter links ſetzen, und hernach mit 3 multipliciren; oder erſt G mit 3 multipliciren, und dann den 10ten Theil nehmen; ſo iſt alſo z. B. $37 \cdot 0,5 = 185 : 10 = 18,5$. Soll G mit $\frac{1}{100} = 0,01$ multiplicirt werden, ſo muſs man das Comma um 2 Stellen weiter links ſetzen, bei $\frac{1}{1000} = 0,001$ um 3, bei 10^{-n} um n Stellen; alſo wenn man z. B. 3257, mit 0,23 mult. ſoll; ſo nehme man 3257 23 mal, und davon den hunderten Theil $= 74911 : 100 = 749,11$. Oder

```
2398 · 57,32                        2398
                                      57,32
  4796                             --------
 7194          oder:                 49,96
16786                               719,4
11990                              16786,
------                             11990
137453,36                         ---------
                                  137453,36
```

Wird aber eine gebrochne Syſtemzahl mit einer ganzen multiplicirt, ſo enthält das Product auch ſo viele Decimalbruchſtellen als der Multiplicand; denn die unterſte Zifer des Multiplicator nimmt alle Zifern des Multipld. beſtimmte ganze male, wie ſie ſind, die zweite Zifer des Multiplicators das Zehnfache davon; u. ſ. w. z. B.

3,25 . 35	32,5 . 3,5	0,325 . 0,35
16,25	35	035
97,5	16,25	0,01625
113,75	97,5	0,0975
	113,75	0,11375

Wenn aber im Multt. und Multd. Decimalbruchzifern ſind, ſo ſind im Producte ſo viele Decimalbruchſtellen, als im Multt. und Multd. zuſammengenommen ſind. Denn, wenn im obenſtehenden Beiſpiele 32,5 . 3,5, ſo muſs 32,5 $3\frac{5}{10}$ mal genommen werden, alſo auch die 0,5 im Multd. erſt durch 10 dividirt werden; daher müſſen im Product 100theile ſein. Man giebt daher die Regel der Decimalmultiplication ſo an: *multiplicire immer wie ganze Zahlen mit ganzen Zahlen, hernach ſchneide vom Producte ſo viele Decimalbruchſtellen ab, als in beiden Factoren zuſammengenommen ſind;* nur muſs man dabei die etwa zu Ende entſtehenden Nullen nicht vergeſſen; z. B.

2,415 .		2,415 .
5,14		514
6960	oder	9660
2415		2415
12075		12,075
12,41310		12,41310

Ein dyadiſches	11,011 . 10,11
Beiſpiel iſt:	10,11
	11011
	1,1011
	110,110
	1001,01001.

Wir unterſuchen noch:

Wie nach irgend einem Syſteme, ganze Zahlen mit ganzen Zahlen dividirt werden.

Eine

Eine ganze Zahl, G, durch eine andere, D, dividiren, heiſst diejenige Einheit ſuchen, von welcher G das D-fache iſt; z. B. 6 : 3 heiſst die Zahl ſuchen, in Bezug auf welche 6 das dreifache iſt; alſo 2 der Quotient (11; 19).

Nun iſt es einerlei, ob man den Quotient aus der ganzen G auf einmal oder aus *allen* ihren Theilen ſucht; weil gerade in dem Maſse als G wächſt auch der Quotient wächſt (19, S. 146). Alſo wenn $G = a + b + c$, ſo iſt $G : D = (a + b + c) : D = (a : D) + (b : D) + (c : D)$. Wenn man alſo aus allen einzelnen decadiſchen Stellen die Particularquotienten ſucht und dieſe addirt, ſo erhält man den ganzen Quotient. Z. B. $4862 : 2 = (4000 : 2) + (800 : 2) + (60 : 2) + (2 : 2) = 2000 = 400 + 30 + 1 = 2431$. Weil es aber kommen kann, daſs in den Zifern der höheren Stellen Reſte bleiben, welche dann als Einheiten der niedern Stellen angeſehen und weiter berechnet werden müſſen, ſo fängt man bei der Diviſion mit den höchſten Stellen an; z. B.

	Quotient	*oder kürzer*
D 2) 273261	(100000 a	2) 273261 (136630,5
100000	30000 b	2.....
	6000 c	
α) 73261		07....
	600 d	
60000		6....
	30 e	
β) 13261	0 f	13...
12000	0,5 g	12...
γ) 1261	136630,5	012..
1261		12..
δ) 61		06.
60		6.
ε) 1,0		01
1,0		1,0
0		1,0
		0

Man ſucht die Zahl, wovon G das Doppelte iſt, alſo die Hälfte von G; die oberſte Stelle in G iſt $2 . 16^5$, alſo iſt auch gewiſs der Q ſo groſs als $1 . 10^5 = a$; denn $2a = 2 . 10^5$. Um die andern Theile von Q zu finden, muſs man alſo das Product des erſten Theils des Q in D aus G abziehen, um die Zahl zu finden, woraus nun noch die Hälfte genommen werden muſs; der erſte Reſt iſt α; und deſſen höchſte Zifer $7 . 10^4$; alſo ſicher der andere Theil des Q. wenigſtens $3 . 10^4$, aber nicht $4 . 10^4$, weil $4 . 10^4 . 2$ ſchon $80000 = 8 . 10^4$ giebt, alle Zifern aber in den niedrigern Stellen in G nicht eins in der nächſthöhern betragen (S. 277). Man muſs daher $b . D = 30000 . 2 = 60000$ von α abziehen, ſo erhält man den zweiten Reſt $\beta = 13261$; auch von dieſem muſs noch die Hälfte genommen werden; wenn 10000 in deſſen oberſter Stelle = od. > 20000 wäre, ſo könnte im Quotient noch in der 5ten Stelle 1 wenigſtens ſtehen; das geht aber nicht, weil man ſchon beim zweiten Theile von Q, in dieſer Stelle die höchſt mögliche Zifer geſetzt hat; alſo muſs man 10000 als $10 . 1000$ anſehen; und weil man auch noch 3000 in β hat, ſo kann man dieſe gleichſtelligen Einheiten ſogleich dazu rechnen; es iſt alſo nun die Hälfte aus β, zunächſt aus 13000 zu ſuchen; dieſe Hälfte iſt > 6000 aber < 7000; alſo iſt c gewiſs = 6000; man muſs alſo $c . D = 6000 . 2$ nehmen, und dieſs von β abziehen, um die Zahl zu finden aus der nun noch die Hälfte zu finden iſt; dieſe iſt $= \gamma = 1261$; alſo $d = 600$, und $d . D = 1200$, alſo $\delta = 61$; demnach $e = 30$; alſo $c . D = 60$; daher $E = 1$. Es iſt alſo $Q = 136630 + (1 : 2) = 136630 + \frac{1}{2}$ (der abſoluten Einheit). Man kann aber auch $E = 1$, als $\frac{10}{10} = 1{,}0$ anſehen und ſuchen, wie viele Zehentheile man 2mal nehmen kann, um 10 zu erhalten, alſo 0,5. Weil demnach Q alle Partialquott. aus *allen* Theilen von G zuſammen enthält, ſo iſt auch wirklich G durch D dividirt worden. Oder es ſei

D	G	Q
I. 216\|)	87654	(405,8055...
432\|2	864..	oder Q =
648\|3	1254	$405 + \frac{174}{216}$
864\|4	1080	
1080\|5	174,0	
1296\|6	172 8	
1512\|7	1200	
1728\|8	1080	
1944\|9	1200	
	1080	
	120	

D	G	Q
II. 3)	7	(2,33.....
	6	oder Q =
	1,0	$2 + \frac{1}{3}$
	9	
	10	

III. 3) 1 (0,33....
1,0
9
1,0
9
1

IV. 7) 1,0 (0,142857...
7
30
28
20
14
60
56
40
35
50
49
1.

V. 125) 753 (6,024
750
300
250
500
500
0
oder Q =
$6 + \frac{3}{125}$

In I ſoll G durch eine mehrſtellige ganze Zahl dividirt werden; weil man der Vielfachen von D bei dieſer Operation benöthigt iſt, ſo wird man wohl thun, wenn man bei groſsen D ſich erſt durch Addition oder Multiplication eine Tafel der Vielfachen (*Tarif*) bis zum Neunfachen von D verfertiget; ſo wie ſie hier unter D geſchrieben iſt (man braucht nur immer das Einfache D zum letzten Vielfachen zu addiren, um das nächſthöhere zu erhalten). Nun kommt es darauf an zu beſtimmen, von welcher Stelle die höchſte Zifer im Quotient ſein müſſe. Die

höchſte

höchste Zifer in G ist 80000, sollte daher in Q 10000 stehen, so müsste D wenigstens 2160000 enthalten. Also kann in Q keine Zifer in der 5ten Stelle stehen. Man sehe daher 80000 als 80 . 1000 an, nehme die in G vorhandnen 7000 dazu, und frage, ob denn in Q 1000 stehen könne; diess kann nur geschehen, wenn 1000 . 216 nicht > 87000 ist; aber ersteres ist schon 216000; also kann auch in Q kein Tausender stehen. Also sehe man die 87000 als 87 . 100 an, nehme gleich die in G vorhandnen 600 dazu; und untersuche, ob in Q eine Zifer in der Stelle der Hunderter stehen könne; setzt man im Q 100, so ist 216 . 100 = 21600 < 87600; also kann man in Q in der dritten Stelle eine grössere Zifer, m, setzen, so dass nur 216 m . 100 nicht > 87600 ist; so vielemale also 216 in 876 gelegen, so viele Hunderter kann man in Q setzen; also weil 4 . 216 = 864 aber 5.216 schon 1080 ist; so ist m = 4; also der erste Theil von Q = 400. Daraus erklärt sich die Regel: *dass man den Divisor unter die ersten Stellen des Dividendus beim Anfange der Operation so stellen müsse, dass die darüber stehenden Zifern im Dividendus, die erste Zahl geben, die grösser als der Divisor ist, und dass dann der daraus gefundne Theil des Quotienten, von der Dignität der untersten Stelle aus dem Dividendus sei, welche über der letzten Zifer des Divisor steht.* Nun ist 400 der Quotient aus 400 . 216 = 86400; diese Grösse also, aus welcher nun, als Theil von G, der Quotient berechnet worden, muss aus G abgezogen werden, um die von G nun noch übrigen Theile zu finden, in welche noch mit 216 zu dividiren ist. Dadurch erhält man eigentlich den ganzen Rest aus G, 1254; wenn man aber nur 876 — 864 nimmt, das ist eigentlich 87600, so bleibt 1200, und noch die Zifern in den niedern Stellen 54. Weil nun 1200 < 21600, so muss man diese 1200 als 120 . 10 ansehen, wo man der Bequemlichkeit halber gleich die obstehenden 50 dazu nehmen kann. Man fragt also, wie viele Zehner man 216mal nehmen kann, um

1250 zu erhalten? keinen einzigen ganzen Zehner; denn 10.216 ſchon 2160; alſo muſs man in dem Q. in der zweiten Stelle 0 ſetzen. Um eine Zahl zu erhalten, welche $>$ 216, ſehe man die noch übrigen 1250 als 1250.1 an, und nehme die obſtehenden 4 Einer dazu; ſo fragt man; wie viele Einer können 216mal genommen werden, um 1254 Einer zu geben? ſo viele, als vielmal 216 in 1254 gelegen; man ſehe in der Tafel nach, ſo iſt $5 \cdot 216 = 1080$; aber $6 \cdot 216$ ſchon 1292; alſo iſt im Q. 5 zu ſetzen. Man hat alſo jetzt, als von dem zweiten Theile von G, aus $1080 = 5 \cdot 216$ den Partialq. gefunden; dieſen muſs man alſo von dem von G noch Uibrigen abziehen, um den neuen Reſt zu erhalten, aus welchem nun noch der Quotient geſucht werden muſs, um den Totalquotient aus G zu erhalten; man erhält 174. Alſo iſt $Q = 405 + (174:216)$. Wenn aber 74 durch 216 dividirt wird, ſo kann man auch jede einzelne Einheit mit 216 dividiren, ſo erhält man zum Quotient $\frac{1}{216}$ (der abſ. Einheit); dieſs 174 mal genommen $= 174:216 = 174 \cdot \frac{1}{216} = \frac{174}{216}$. Alſo iſt auch $87654:216 = 405 + \frac{174}{216}$. Hierbei erſehen wir Folgendes im Allgemeinen.

1) Daſs der Quotient aus $G:D = \frac{G}{D}$ der abſoluten Einheit; z. B. $35:357 = \frac{35}{357}$. Denn anſtatt die ganze G durch D zu dividiren, kann man jedes 1 in G durch D dividiren; ſo erhält man $1:D = \frac{1}{D}$; dieſs alſo Gmal genommen iſt $=$ $G:D = G \cdot \frac{1}{D} = \frac{G}{D}$ der abſ. Einheit. (Dieſen Satz werden wir unten in ſeiner höchſten *Allgemeinheit* betrachten.)

2) Daſs, wenn $G:D$ zuletzt einen Reſt ganzer Einheiten läſst, welcher Reſt $< D$ (d. i. wenn G durch D nicht in ganzen Zahlen theilbar iſt): an den Quotienten aus $G:D$ noch ein Bruch angefügt werden muſs, deſſen Zähler der

Reſt

Reſt und deſſen Nenner D iſt. Z. B. $7:6 = 1 + \frac{1}{6}$; $17:9 = 1 + \frac{8}{9}$.

Man kann aber auch den noch übrigen Theil des Quotienten im Beiſpiele I, welcher zuſammen < 1, als einen Decimalbruch ausdrücken, wenn man die Operation auf dieſelbe Art weiter fortführt. Denn es war der letzte Reſt in ganzen Zahlen $174 < 216$. Man hat alſo noch daraus den Partialquotienten, das iſt, weil $D = 216$, den 216ten Theil zu ſuchen. Siehe alſo 174 Einer als die zehnfache Menge von Zehntheilen, das iſt als $1740 \cdot 0,1 = 174,0$ an, und frage wie viele Zehntheile 216 mal genommen werden können, um $\frac{1740}{10} = 174,0$ zu geben? ſo viele, als vielmal 216 in 1740 iſt; dieſs nächſte Vielfache von 216 an 1740 iſt 1728 und dazu der Factor 8; alſo iſt 0,8 der nächſte Theil des Quotienten. Man nehme alſo von 174,0 $0,8 \cdot 216 = 172,8$ weg, um den neuen Reſt zu erhalten; dieſer iſt, 1,2; alſo muſs man, um den ganzen Q aus G zu haben, noch 1,2 durch 216 dividiren. Weil $1,2 < 216$ (denn ſonſt hätte man in der vorigen Stelle im Q. 1 mehr genommen), ſo ſehe man 1,2 als die zehnfache Vielheit in der nächſtgeringeren Stelle an, alſo als $\frac{120}{100} = 1,20$; und bedenke wie viele Hunderttheile man 216 mal nehmen kann, um $\frac{120}{100}$ zu erhalten? keinen, denn ſonſt müſste man wenigſtens 216 haben. Alſo muſs man in Q in die Stelle der Hunderttheile 0 ſchreiben. Man ſehe alſo ferner dieſe $\frac{120}{100}$ als $\frac{1200}{1000} = 1,200$ an, und unterſuche, wie viele Tauſendtheile in Q genommen werden können, welche 216 mal genommen 1,200 geben? Das nächſte Vielfache von 216 an 1200 iſt das 5fache $= 1080$; alſo iſt in Q noch 0,005 zu ſetzen; wenn man nun $0,005 \cdot 216$ von 1,200 abzieht, ſo bleibt wieder 120 übrig, welches $\frac{120}{10000} = 0,0120$ ſind; alſo wird der Quotient auch noch 0,0005 enthalten müſſen; da bleiben wieder 0,00120 übrig, alſo auch noch 0,00005; und ſo fort ins Unendliche; es iſt alſo

$$87654 : 216 = 405,80555 \ldots.$$

und läſst ſich daher der Bruch $\frac{87654}{216}$ d. i. 87654 : 216 nicht ganz genau nach dem Decimalſyſteme ausdrücken; man fehlt daher immer weniger, je mehrere Bruchſtellen man hinzunimmt (vergleiche wieder S. 277).

Hierdurch zeigt ſich nun ein Weg, alle gemeine Brüche in decadiſche Syſtembrüche zu verwandeln, wie davon I bis V Beiſpiele giebt; in II, III, IV, erhält man unendliche Reihen, deren Zifern periodiſch wiederkehren; in V erhält man einen Decimalbruch der ganz genau dem gemeinen gleich kommt, weil einmal der neue Theil des Q in dem letzten Reſte vollkommen aufgeht. Wir betrachten nur das vierte Bſ; da ſoll 1 durch 7 dividirt werden; aber $1:7 = \frac{1}{7}$ alſo iſt auch Q aus $1:7 = \frac{1}{7}$. Weil $1 < 7$, ſo ſehe man 1 als $\frac{10}{10} = 1{,}0$ an, und frage, wie viele Zehntheile können 7mal genommen werden, um $\frac{10}{10}$ zu geben? ſo viele, als vielemale 7 in 10 liegt; alſo nur eins; der erſte Theil des Quotienten iſt alſo 0,1, dieſs aber iſt zu <; denn $0{,}1 \cdot 7 =$ erſt 0,7; man ziehe alſo 0,7 von 1,0 ab; ſo bleiben noch 0,3 übrig. Dieſe ſehe man als 0,30 d. i. als $\frac{30}{100}$ an (ſchreibe an 3 rechts eine Null) und ſuche den Quotient aus $\frac{30}{100} = 0{,}30$ welcher Quotient, weil $4 \cdot 7 = 28$, gleich iſt 0,04; der neue Reſt iſt $0{,}30 - 0{,}28 = 0{,}02$. Dieſe 0,02 ſehe man wieder als $\frac{20}{1000} = 0{,}020$ an; oder weil man nicht nöthig hat die Nullen vor 2 zu ſchreiben, wenn die Zifern immer richtig untergeſetzt werden: ſchreibe hinter 2 wieder eine 0; der nächſte Theil des Quotienten iſt daher 0,002; da bleibt wieder ein Reſt, u. ſ. f. Woher kann man aber wiſſen, ob dieſer Decimalbruch $= \frac{1}{7}$ ins Unendliche läuft oder nicht? — Was auch bei der Operation für Reſte nach einander kommen, ſo können es doch keine andern als 1, 2, 3, 4, 5, 6 ſein: denn ſollte ein Reſt $= 7$ oder > 7 ſein; ſo hätte man in des Quotienten voriger Stelle 1 oder mehrere Einheiten mehr ſetzen können.

Nach

Nach 6 Reſten muſs alſo gewiſs der erſte Reſt wieder kommen, alſo 1, und nun müſſen auch immer periodiſch dieſelben Zifern im Q. wiederkehren, weil die Operation immer wieder von vorn angeht, indem vom gleichen Reſte, wenn weiter dividirt wird, das Gleiche gelten muſs, als von ihm, wenn er zuvor kam. Alſo iſt $\frac{1}{7} = 0{,}142857142857 \ldots$.

Im Allgemeinen wenn der Diviſor m Einheiten in ſich enthält, das iſt wenn der Nenner des decimalauszudrückenden Bruchs m iſt; ſo ſind nur $m - 1$ verſchiedene Reſte möglich; wenn man alſo den Quotient bis auf $m - 1$ Stellen geſucht hat, ſo muſs der erſte Reſt gewiſs wieder kommen; und es läuft dann der Decimalbruch welcher dem gemeinen gleich iſt periodiſch ins Unendliche. Es kann aber vielleicht, welches erſt in der Folge zu unterſuchen, eher der erſte oder ein folgender Reſt wiederkehren, als man $m - 1$ Stellen berechnet hat, dann läuft gewiſs auch der Bruch periodiſch ins Unendliche.

Welche Brüche aber müſſen ſich ganz genau im Decimalſyſteme ausdrücken laſſen, und welche nicht? Es kommt dabei blos auf ihren Nenner an; denn wenn dieſer in eine beſtimmte + Potenz von 10 theilbar, ſo muſs ſich auch jeder Bruch dieſes Nenners durch einen Decimalbruch ganz genau ausdrücken laſſen; widrigenfalls nicht; z. B. weil 2 in 10 aufgeht, ſo iſt auch $\frac{1}{2} = 0{,}5$, $\frac{3}{2} = 1{,}5$; oder weil $20 \cdot 5 = 100$, ſo müſſen ſich auch $\frac{1}{20}$, $\frac{2}{20} \ldots \frac{19}{20} \ldots$ decadiſch autdrücken laſſen; denn weil 20 in 100 aufgeht, ſo iſt von $1{,}00 = \frac{100}{100}$ der 20te Theil $= 0{,}05$; alſo auch geht 20 in *jeder* Menge von Hunderttheilen auf, welche Menge ſelbſt eine ganze Wiederholung des Hundertfachen iſt. Z. B. $\frac{19}{20} = \frac{19{,}00}{20} = \frac{1900}{100} : 20 = 0{,}95$. Aus dieſen Betrachtungen wird der Grund folgendes Lehrſatzes einzuſehen ſein: *Alle Brüche, deren Nenner keine andere Theiler als 2 und 5 haben (welche der Form $2^p \cdot 5^p$ ſind), laſſen ſich*

ſich in Decimalbrüchen genau ausdrücken: alle andere aber nicht. Und zwar braucht man im erſteren Falle ſo viele Decimalbruchſtellen, als die meiſtenmale 2 oder 5 im Nenner enthalten iſt; z. B. $\frac{1}{2} = 0,5$; $\frac{1}{4} = \frac{1}{2.2} = 0,25$; $\frac{1}{5} = 0,2$; $\frac{1}{20} = \frac{1}{4.5} = \frac{1}{2.2.5} = 0,05$ (2 Stellen, weil 2 in 20 2mal als Factor iſt); $\frac{1}{250} = \frac{1}{2.5.5.5} = 0,004$. Ich werde im andern Theile des Arithm., wenn ich von den Factoren und Primzahlen handle, im Allgemeinen das Problem löſen: Welche Brüche in einem beliebigen Syſteme ſich in Syſtembrüchen genau ausdrücken laſſen, und in wieviel Stellen; und welche nicht, und nach welchem Geſetze dann die Perioden dieſer unendlichen Reihen ſich bilden. Da wird auch der genannte Lehrſatz bewieſen werden.

Die Brüche bis $\frac{1}{20}$ ſind decimal:

$\frac{1}{2} = 0,5$	$\frac{1}{11} = 0,09.$
$\frac{1}{3} = 0,3..$	$\frac{1}{12} = 0,08\overset{*}{3}.$
$\frac{1}{4} = 0,25$	$\frac{1}{13} = 0,076923.$
$\frac{1}{5} = 0,2$	$\frac{1}{14} = 0,07\overset{*}{1}42857.$
$\frac{1}{6} = 0,16.$	$\frac{1}{15} = 0,0\overset{*}{6}66.$
$\frac{1}{7} = 0,142857.$	$\frac{1}{16} = 0,0625$
$\frac{1}{8} = 0,125$	$\frac{1}{17} = 0,0588235294117647.$
$\frac{1}{9} = 0,1.$	$\frac{1}{18} = 0,0\overset{*}{5}.$
$\frac{1}{10} = 0,1$	$\frac{3}{19} = 0,052631578947368421.$

Daraus kann man nun leicht durch Multiplication durch 2, 3, 4 decimal $\frac{2}{m}$, $\frac{3}{m}$, $\frac{4}{m}$... finden; z. B. da $\frac{1}{11} = 0,09.$ ſo iſt $\frac{2}{11} = 2 . 0,09 .. = 0,18 ..$; oder da $\frac{1}{3} = 0,333 ..$ ſo ſind $\frac{3}{3} = 1 = 0,999 ..$, dieſs aber iſt nur dann genau wahr, wenn die Reihe wirklich in Abſicht auf Anzahl der Glieder (S. 177) unendlich iſt; man fehlt aber immer um 10mal ſo wenig, wenn man noch eine Stelle hinzunimmt. Ferner iſt z. B. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = 1$; alſo auch:

0,5 +

0,5 +	denn immer wegen der Endlosigkeit von 0,33
0,33.. +	und 0,16 muſs eine 9 wieder entſtehen.
0,16..	
0,99....	

Der Vortheil von dieſer Reduction gemeiner Brüche in Decimalbrüche beſteht (S. 178) darin, daſs man alle dergleichen Brüche, ohne ſie erſt durch andere Methoden auf gemeinſames Maſs zu bringen, addiren und ſubtrahiren kann, ſo genau man will; z. B. $\frac{7}{11} + \frac{13}{5} = \frac{7}{11} + 2 + \frac{3}{5} =$

0,63.. +	Auf dem gewöhnlichen Wege der Reduction
2 +	erhält man:
0,6	$\frac{5 \cdot 7 + 11 \cdot 13}{55} = 3 + \frac{13}{55}.$
3,23636....	

Wenn in dieſer Tabelle hinter dem Decimalbr. kein . ſteht, ſo iſt er ganz genau; ſteht hinter ihm ein ., ſo iſt er unendlich und iſt von der erſten Zifer nach dem Comma an periodiſch; ſteht aber zugleich über einer Zifer ein *, ſo iſt er von dieſer Zifer an periodiſch; z. B. $\frac{1}{18} = 0{,}0\overset{*}{5}$. iſt $= 0{,}0555\ldots$

Wenn der Diviſor, D, eine ganze Zahl iſt, ſo iſt nur noch der Fall zu betrachten übrig, wo G ein Decimalbruch, $> <$ 1, iſt. Es folgen 2 Beiſpiele, die ſich ſelbſt nach dem Vorigen erklären.

```
I. 19) 34,56 (1,8189...          II. 20) 0,0079 (0,000395
       19 ..                                60
       155 .                                190
       152 .                                180
         36                                 100
         19                                 100
         170                                ---
         152                                0
          180                            Alſo iſt
          171                      0,0079 : 20 ganz genau
            9                      0,000395.
```

Wer

Wer das Vorige eingeſehen, dem wird von ſelbſt einleuchten, daſs der Quot. in I unendlich, und wie $\frac{1}{19}$ (an Anzahl der Periodenſtellen) periodiſch ſein müſſe; weil 19 eine Primzahl, u. ſ. w.; auch warum im zweiten Falle der Quotient eine endliche Reihe iſt; und daſs im Allgem. auch hier gelte: daſs die Quotienten endlich ſind, wenn der Diviſor der Form $2^p \cdot 5^p$ u. ſ. w., aber endlos, wenn der Diviſor andere Theiler als 2 und 5, oder wohl gar keine hat (wie 17, 19).

Nun wird auch deutlich ſein, wie man ganze Zahlen mit Decimalbrüchen und Decimalbrüche mit Decimalbrüchen dividiren könne, ſo daſs entweder der Quotient ganz genau oder in einer endloſen periodiſchen Reihe dargeſtellt wird. Folgende beide Beiſpiele werden die allgemeine Einſicht hervorbringen können:

D	G	Q	D	G	Q
I. 3,25)	27935	(85,9.. × 100	II. 0,209)	0,375	(0,0017..
	2600	=		209	
	1935	8590		1660	
	1625			1463	
	3100			197	
	2925		Alſo der Quotient =		
	175		0,0017.. × 1000 = 1,7...		

Im erſten B. ſoll 27935 : 3,25 das iſt mit $\frac{325}{100}$; man ſucht alſo die Zahl, von welcher der 100te Theil 325mal in G gelegen; man findet ſie alſo, wenn man G erſt durch 325 dividirt (in 325 Theile theilt) und dieſen Quotient mit 100 multiplicirt, alſo das Comma um ſo viel Decimalbruchſtellen, als in D ſind, weiter rechts ſetzt.

In II wird 0,375 : 0,209 alſo mit $\frac{209}{1000}$; man ſucht alſo die Zahl, von der der 1000 Theil 209mal in G liegt; man

findet

findet sie also, wenn man G durch 209 dividirt, und diesen Quotient hernach mit 1000 multiplicirt, also das Comma um so viele Stellen, als in D Decimalbruchstellen sind, höher nach rechts rückt.

Erstlich muss man geuau, nach dem Vorigen, bestimmen, in welche Stelle das Comma käme, wenn der Divisor eine ganze Zahl wäre, und hernach das Comma um so viele Stellen höher rücken, als Decimalbruchstellen in D sind, z. B. 27935 : 325 giebt 85,9.. also 27935 : 3,25 giebt 85,9.. multipl. mit 100, = 8590.

Wenn man nicht durch Näherung den Rest weiter berechnet, so gilt daher die Regel: Der Quotient hat so viele Decimalbruchstellen, als kommen, wenn man die in D von denen in G abzieht (weil man den Q. mit so vielmal 10 multipl. muss, als Decimalbruchstellen in D sind).

Ich füge einige Beispiele der dyadischen Division hinzu, wozu sich der Leser leicht selbst die Theorie bilden, so wie derselbe auch sich diese Theorie allgemein für jedes beliebige System ausdrücken wird.

111) 1'011 (1,1001 = decadisch 11 : 7 = 1,571428..
111
―――
1'000
111
―――
1'000
111
―――
10..

1011) 11'00011 (1001 = decadisch 99 : 11 = 9
1011 ...
―――
1011
1011
―――
0

11) 1',00 (0,0101 = decadiſch $\frac{1}{3}$ = 0,333...

```
 11
 ——
  1',00
   11
   ——
    1.
```

111) 1',000 (0,001001 = decadiſch $\frac{1}{7}$ = 0,142857.

```
 111
 ———
  1000
   111
   ———
     1
```

Ich ſetze noch ein Beiſpiel ſexageſimaler Multiplication und Diviſion her:

```
        03 - 25 - 02 mult. mit 23,11
                      23,11
        ——————————————————————
              37 - 35,22
     01 - 18 - 35 - 46
     ——————————————————————
     01 - 19 - 13 - 21,22
```

Umgekehrt 01 - 19 - 13 - 21,22 : 23,11 ſteht ſo:

```
23,11) 01 - 19 - 13 - 21,22 (03 - 25,02 multiplicirt mit 60
        1 - 09 - 33  .  .
        ——————————————
            9 - 40 - 21 .
            9 - 39 - 35 .
            ——————————————
                   46 - 22
                   46 - 22
                   ———————
                      0
```

alſo iſt der Quotient = 03 - 25 - 02.

c) Die Multiplication und Diviſion dienen ſich wechſelſeits zur Probe; denn wenn a . b = c, ſo iſt auch c : b = a

= a und umgekehrt. Bei der Probe der Division durch Multiplication muſs man nicht vergeſſen, den Reſt mit in Rechnung zu bringen; z. B. oben Seite 288 im 1 Beiſpiele war 87654 : 216 = 405,8055; und noch der Reſt 120 nehmlich 0,0120; alſo muſs (405,8055 . 216) + 0,0120 = 87654 ſein. Das iſt:

$$\begin{array}{r} 405{,}8055 \cdot 216 \\ \hline 2434{,}8330 \\ 4058{,}055 \\ 81161{,}10 \\ +\ 120 \\ \hline 87654{,}0000 = 87654 \end{array}$$

c) Um dieſe Rechnungen nach dem Decimalſyſteme zu verrichten, muſs man ſich die Producte aller Zahlen in alle Zahlen bis 9 geläufig machen, die in dem Einmaleins dargeſtellt ſind; im dyadiſchen Syſteme braucht man weiter kein Einmaleins als im ſtrengſten Verſtande 1 . 1 = 1 (und 0 . 0 = 0, auch 1 . 0 = 0). Man wird wohl thun, das Einmaleins nicht wörtlich zu memoriren, ſondern ſich ſelbſt beſtimmte Gröſsen z. B. beſtimmte Linien, nach dem Decimalſyſteme abgetheilt, dabei zu denken bis man die Fertigkeit erreicht hat. Die natürlichſte Anordnung dieſer Rechentafel iſt:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

33.

33.

Die Reihen aller Art (31) entstehen durch wiederholtes Setzen oder Davonnehmen bestimmter Verhältnisse; durch die absolute Einheit, und die Verhältnisse, welche von ihr aus construirt oder reconstruirt werden, ist die Grösse des dazu gehörigen Gliedes durchaus bestimmt.

Umgekehrt kann man auch jede mögliche Grösse als jedes beliebige Glied jeder beliebigen Reihe ansehen; und daraus nach den vorgeschriebnen Verhältnissen, sowohl die dazu gehörige Einheit, als auch jedes andere Glied finden. Es sei z. B. Fig. 65 B gegeben, es soll als letztes Glied der Reihe 1, 3, 7 angesehen werden; diese Glieder entstehen durch das Setzen der Verhältnisse 1 . . 3 und 3 . . 7; man sehe also B als 7 an, dividire A durch 7, so erhält man die Einheit für B; daraus kann man nun auch das Dreifache bilden. Allgemein wenn B als das letzte Glied der Reihe $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}, \frac{g}{h} \ldots, \frac{n}{m}$ angesehen wird, so ist B : $\frac{n}{m}$ = der Einheit = 1; also diese 1 . $\frac{a}{b}$ giebt $\frac{a}{b}$ nach der Grösse B; 1 . $\frac{c}{d}$ giebt $\frac{c}{d}$ nach Massgabe von b u. s. w.

Auch kann man jede Grösse, B, als die Summe einer beliebigen Menge Glieder einer jeden Reihe betrachten; z. B. Fig. 66 sei B = 2 + 3 + 5; so suche man die Summe der Glieder, 10, dividire damit in B, so erhält man die Einheit, m, woraus man nun jedes Glied durch Multiplication finden kann.

Daher auch, wenn Fig. 66, 2 Grössen B und C gegeben sind, und die eine ist nach einem bestimmten Verhältnisse eingetheilt, so kann man auch, C, nach demselben Verhältnisse eintheilen; und es verhalten sich dann gleichartige Theile in C zu gleichartigen Theilen in B, wie die Ganzen (S. 177).

34.

34.

Nunmehr können wir auch zu der allgemeinſten Erklärung der Potenzen oder Dignitäten fortgehen, von welchen ich nur, in 31, die leichteſten Arten erklärt habe.

1) Wenn von der abſoluten Einheit (von 1) aus ein beſtimmtes Vielfaches eines beliebigen Verhältniſſes genommen wird, ſo entſteht eine beſtimmte Gröſse als Hinterglied zum Vordergliede 1, welche die eben ſo hohe Potenz (Poteſtät, Dignität) des Verhältniſſes heiſst, durch deſſen Vervielfachung ſie gebildet wird, als eine hohe Vielheit dieſes Verhältniſſes genommen wurde.

Das Verhältniſs, durch deſſen Vervielfachung die Potenzen entſpringen, heiſst das *Wurzelverhältniſs*. Wenn man das Wurzelverhältniſs auf die Form $1 \,..\, 1+p$ bringt, ſo heiſst ſein Hinterglied die *Wurzel*, alſo im Wurzelverh. $m \,..\, n$ iſt die Wurzel $\frac{n}{m}$, weil $m \,..\, n$ $= 1 \,..\, \frac{n}{m}$

Eine Gröſse iſt alſo nicht für ſich betrachtet eine Potenz, ſondern vermöge ihres Verhältniſſes zur Einheit, welches als ein Beſtimmtvielfaches eines andern Verh. (des WV.) betrachtet wird.

Die Zahl, welche an die $\sqrt{}$ geſetzt wird, und andeutet, ein wie-Vielfaches von dem Verhältniſſe der Einheit zu ihr, von der Einheit an geſetzt (conſtruirt) werden ſoll, d. i. zu der wie hohen Dignität (zu welchem *Grade*) die Wurzel erhoben werden ſoll; heiſst der *Zeiger* oder *Exponent*.

Das WV. kann jedes mögliche, endliche oder unendliche ſein.

Denn

Denn jedes Verhältnifs, als ftetige Gröfse (29) kann zu jeder Vielheit erhoben werden.

Hierbei fragt fich, ob denn beftimmte Poteftäten eines unendlichen Wurzelverh. beftimmter Art, dennoch beftimmte Potenzenglieder haben könne, deren Verhältnifs zu 1 ein endliches ift?

Der Exponent kann jede endliche oder idealifche Vielheit fein. *Oder:* man kann von jedem Verhältniffe ein Verhältnifs zu Stande bringen, welches zu ihm als Wurzelverhältniffe, als des letzteren Dignität, ein beliebiges endliches oder unendliches Verhältnifs (Logologen, 29) hat.

Denn von jedem Verhältniffe, als Einheit ftetiger Gröfse, kann jedes Vielfache feiner Art, d. i. jede Poteftät conftruirt werden. Der Exponent ift immer als Vielheit feiner Einheit, d. i. des Wurzelverhältniffes daffelbe als 1 gefetzt, ausgedrückt; ift daher bei endlichem Grade der Wurzel eine Zahl, aber bei idealifchem Grade derfelben, nur näherungsweife (17, b) in Zahl auszudrücken.

Der Exponent ift daher eine ftetig wachfende Gröfse; und mit ftetig wachfendem Exponenten wächft (nimmt zu oder ab, nach der Natur der Wurzel) auch die Poteftät der Wurzel felbft ftetig. Zur Wurzel mit jedem Exponenten gehört eine, aber nur eine beftimmte Poteftät (beftimmte Gröfse der abfoluten Einheit, von welcher aus potenzirt wird).

Jedes Conftruiren der Potenzen felbft, fetzt nächft dem WV., auch die abfolute Einheit voraus; alfo wenn man auch gar kein Vielfaches eines beftimmten Verhältniffes (die nullte Poteftät) von der Einheit aus conftruirt, fo bleibt doch die Einheit; daher, wenn a jede endliche und idealifche

Viel-

Vielheit als Wurzel (jede Wurzel) bedeutet, so ist $a^0 = 1$ also auch $1^0 = 1$.

Diess kann man auch so vorstellen:

Das Grundverhältniss, durch dessen Zusammensetzung mit dem Bestimmtvielfachen irgend eines Verhältnisses, das auf die Form 1 . . 1 + p gebracht ist, des letzteren bestimmte Potenzen als Hinterglied entstehen, ist das der Identität. Wenn demnach auch gar kein Verhältniss in bestimmter Vielfachheit mit ihm zusammengesetzt wird, so bleibt doch das Grundverhältniss 1 . . 1 (der Identität) selbst, also hat man das Hinterglied 1, als die 0-te Potenz jedes WVs.

Wird vom directen WV. aus ein bestimmtes Hinterglied, durch bestimmte Vervielfachung (Vielheit) desselben gebildet, so ist ein solches eine *positive Dignität* (+ P) der Wurzel. Wird aber das umgekehrte WV. in bestimmter Vielheit von 1 aus gesetzt, so heissen die entstehenden Hinterglieder *negative Potestäten* (— P) der Wurzel.

Ist der Exponent 1 oder eine ganze Zahl > 1, so heisst die durch ihn angedeutete Potenz eine *ganze* Potenz der Wurzel; ist aber der Exponent ><1, ein Bruch, so heisst die durch ihn angedeutete Potestät eine *gebrochne*. Also a^n eine ganze $a^{\frac{n}{m}}$ eine gebrochne Dignität der W. a.

Die *ganzen* + Pott. jeder Wurzel, a, entstehen also durch Multiplication mit der Wurzel; die ganzen — Pott. aber durch Division mit derselben.

Denn wenn von der W. a die n-te ganze Potestät, z. B. die 3te gesucht wird, so muss man das WV. 1 . . a 3mal zusammennehmen, das Dreifache davon construiren. Also

1 . . a +

$$\begin{array}{l} 1..a + \\ 1..a + \\ 1..a \\ \hline \end{array}$$

$$1..a^3 = 1..aaa = (1..a).3.$$

Wenn aber z. B. a^{-3} gesucht wird, so ist

$$\begin{array}{r} a..1 + \\ a..1 + \\ a..1 \\ \hline \end{array}$$

$$1..a^{-3} = -(1..a).3 = a..1.3 = aaa..1$$

$$= 1..\frac{1}{aaa} = 1..1:a:a:a$$

Die Definition der Potenzen kann aber nicht also gegeben werden: *Wenn die absolute Einheit durch eine Grösse a, n-mal nacheinander multiplicirt wird, so entstehet die n-te Potestät der multiplicirenden Grösse;* weil diese Def. blos auf ganze Potestäten, nicht aber (so viel hier verstanden werden kann) auf gebrochne, am wenigsten auf Potestäten mit idealischem Exponenten passt; denn was kann man sich nach dieser Definition von $a^{\frac{n}{m}}$ denken? diess hiesse: *die Dignität; welche entsteht, wenn man die* 1 $\frac{n}{m}$ *-mal hintereinander mit der Wurzel multiplicirt;* z. B. $8^{\frac{2}{3}} = 4$.

Alle positive und negative, ganze und gebrochene, endliche und idealische Potenzen jeder möglichen positiven ganzen, gebrochenen, endlichen und idealischen Wurzel sind positive Grössen.

Denn das — im Exponenten bei negativen Potenzen, drückt blos aus, dass man das umgekehrte (negative) WV vervielfachen solle; nicht, dass man im WV die Zeichen seiner Glieder verändern solle. Ist nun ein be-

beſtimmtes Wv. von Gröſsen mit einerlei Zeichen, die alſo gegen einander poſitiv, gegeben, ſo müſſen auch die Glieder aller Vielfachen dieſes Verhältniſſes poſitive Gröſsen ſein. Nun aber ſind auch die Glieder des umgekehrten Wv. poſitiv, wenn ſie es im directen ſind, folglich auch die Glieder jedes vielfachen des umgek. Wvs. Aber jede Potenz iſt Hinterglied des beſtimmtvielfachen directen oder indirecten Wvs.; alſo u. ſ. w.

Iſt die Wurzel, $a > 1$, ſo ſind alle + Potenzen von a deren Exponent > 1 auch $> a$, um ſo mehr je gröſser der Exponent; iſt die Wurzel $a < 1$, ſo ſind die + Potenzen von a, deren Exp. > 1 alle $< a$, um ſo mehr je gröſser der Exponent. Und ſo umgekehrt in beiden Fällen bei den — Pott. Iſt aber die Wurzel ſelbſt 1 ſo iſt jede + und — Dignität, deren Exponent $> <$ 1 ſein kann, wieder Eins.

(Der allgemeine Beweiſs kann dafür hier nicht gegeben werden; es hat ſich auch zeither eben Niemand, ſo viel ich weiſs, bemüht, ihn allgemein für alle WVv. und *allerlei* Exponenten zu führen; ſo wie überhaupt, meines Bedünkens, nicht leicht eine Lehre der Arithmetik, nicht ſowohl in Abſicht auf Vollſtändigkeit, als in Abſicht auf die Wiſſenſchaftlichkeit der Beweiſse, ſo dürftig zeither davon gekommen iſt, als die der Potenzen; welches auch aus der faſt allgemeinen Vernachläſsigung der gründlichen Betrachtung der Verhältniſſe nicht anders kommen konnte.

Es ſteht alſo dieſer Satz eigentlich als Problem hier. Für ganze und gebrochne Exponenten der Form $\frac{1}{n}$ iſt der Beweiſs in 31 enthalten. Im andern Bande dieſes Werks will ihn allgemein vortragen.)

2) So wie man jedes Verhältniſs durch jede Vielheit multipliciren, das iſt jede beliebige Potenz davon conſtruiren kann; ſo kann man auch jedes Verhältniſs als ein Beſtimmtvielfaches anſehen, und dazu die Einheit ſuchen, das heiſst das Verh., wovon das gegebne das beſtimmte Vielfache iſt (29, D). Wenn z. B. das Verh. 4..9 als das doppelte angeſehen wird, d. i. durch 2 dividirt wird, ſo erhält man $(4..9):2 = 2..3$, weil $(2..3)2 = 4..9$. Wird dieſs gegebne Verhältniſs auf die Form $1..1\overline{+}p$ gebracht, und man ſoll $(1..a):m$ nehmen, ſo heiſst dieſs auch: man ſoll dasjenige Verhältniſs der Form $1..1\overline{+}p$ ſuchen, von deſſen Hintergliede a die m-te Poteſtät iſt; z. B. $(4..9):2 = 2..3$, heiſst $(1..\frac{9}{4}):2 = 1..\frac{3}{2} = 2..3$; es iſt aber $(\frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4}$. Wenn man nun irgend eine Gröſse, a, als irgend eine m-te Potenz anſehen (d. i. das Verhältniſs deſſen Hinterglied a iſt, durch m dividiren) ſoll, ſo nennt man dieſs auch ſchicklich: *die m-te Wurzel* aus a ſuchen, und man bezeichnet dieſs durch $\sqrt[m]{a}$; die Vielheit, als die wie hohe Potenz a angeſehen werden ſoll, heiſst der *Wurzelzeiger* oder *Wurzelexponent;* die Gröſse aber woraus die Wurzel gezogen wird, *die Gröſse unter dem Wurzelzeichen;* die aber dadurch entſtehende Gröſse, ſo ausgedrückt, *die Wurzelgröſse.*

Hieraus wird einem aufmerkſamen Leſer von ſelbſt einleuchten: daſs der Wurzelexponent ganz, gebrochen; poſitiv, negativ; endlich oder idealiſch ſein könne: weil man jedes directe oder indirecte Verhältniſs, als ſtetige Gröſse (29), mit jeder Vielheit dividiren kann.

Weil es einerlei iſt, mit $\frac{n}{m}$ zu multipliciren, oder mit

$\frac{m}{n}$

$\frac{m}{n}$ zu dividiren (19), ſo muſs auch $\sqrt[\frac{m}{n}]{a} = a^{\frac{n}{m}}$ ſein; denn $\sqrt[\frac{m}{n}]{a}$ erhalte ich wenn ich 1 . . a durch $\frac{m}{n}$ dividire; und $a^{\frac{n}{m}}$, wenn ich, 1 . . a durch $\frac{n}{m}$ multiplicire; aber (1 . . a) . $\frac{n}{m}$ = (1 . . a) : $\frac{m}{n}$. Man kann alſo des Wurzelzeichens, und des Wurzelexponentens ganz entbehren; in dem Sinne, als die Multiplication überhaupt die Diviſion entbehrlich macht; die Anſicht aber iſt der Natur nach verſchieden, und die eine ſo urſprünglich als die andere.

3) (Die Lehre von den irrationalen oder ſurdiſchem und von den unmöglichen oder imaginären Gröſsen, kann der Natur der Sache nach hier noch nicht gründlich erklärt werden, weil ſie die Auflöſung des in dieſem § gedachten Problems unter andern mit in ſich ſchlieſst; es muſs dieſs daher erſt im zweiten Theile geſchehen.)

35.

Da ſich alle Verhältniſſe auf die Form 1 . . 1 ∓ p bringen laſſen (S. 180), ſo ermiſst man gewiſs alle mögliche Verhältniſſe: wenn man irgend eine abſolute Einheit ſtetiger Gröſse denkt, und damit eine andere derſelben Art vom Nichts ohne Ende ſtetig wachſend vergleicht; woraus klar iſt, daſs es unendlichmal unendlich viele Verhältniſſe giebt.

Es ſei z. B. Fig. 67. die abſol. E. A, die Linie B wachſe vom Nichts ohne Ende, ſo durchläuft die B gegen A alle mögliche Verhältniſſe (§. 8. S. 48); erſt die der gröſseren, dann die der kleineren Ungleichheit; B

wächſt

wächſt ſtetig, alſo liegen, wegen der unendlichen Theilbarkeit (12) ſtetiger Gröſse zwiſchen $A..\alpha\beta$ und $A..\alpha\gamma$ unendlichviele Verhältniſſe, welche alle von einander verſchieden ſind, weil eine längere B gegen A immer ein anderes Verhältniſs hat als eine kürzere (3 S. 36); und es findet dieſs ſtatt, man mag β und γ ſich ſo nahe ſetzen als man will. Da nun B ins Unendliche läuft, ſo hat man, weil in ihr unendlich viele Puncte, unendlichmal unendlich viele Verhältniſſe.

Wenn man nun irgend zwei endliche oder unendliche Verhältniſſe betrachtet, die auf die Form $1..1 \mp p$ gebracht ſind (ich will ſie allgemein $1..a$ und $1..b$ nennen), ſo haben beide Verhältniſſe, als ſtetige Gröſsen (29), ſelbſt gegen einander ein beſtimmtes endliches oder unendliches Verhältniſs (einen endlichen oder unendlichen Logologen, 29); das iſt $(1..a)..?.(1..b)$; alſo $1..b$ iſt $= (1..a)^u$, wenn u jede Vielheit bedeutet; und daher $1..a = (1..b)^{\frac{1}{u}}$ (17a). Da wäre alſo (29, C) der Logolog zu $(1..a)..(1..b) = 1..u$, und zu $(1..b)..(1..a) = u..1 = 1..\frac{1}{u}$. Wenn man nun den Logologen (das Verhältniſs der Verhältniſſe) auf die Form $1..1 \mp p$ brächte, ſo wie auch die Verhältniſſe, zu welchen er gehört, ſo könnte man ſich hiebei folgender Abkürzung bedienen: Anſtatt $(1..a)..(1..b) = 1..u$ könnte man ſchreiben $a..b = u$; oder zu a und b gehört der Logolog u; weil das Verh. $1..b$ das u-fache des Verhältniſſes $1..a$ iſt. So würde alſo zu 4 und 8 der Logolog $\frac{3}{2}$ gehören; denn $(1..4)..(1..8) = 2..3 = 1..\frac{3}{2}$ (weil $(1..2)^2 = (1..4)$ und $(1..2)^3 = 1..8$. So laſſen ſich alſo alle Logologen durch eine einzige Vielheit ausdrücken; z. B. $(9..27)..(3..81) = (1..3)..(1..27) = 1..3$, oder nach der kürzeren Bezeichnung $3..27 = 3$.

So

So wie nun ferner alle ſtetige Gröſsen erſt dadurch vergleichbar werden, daſs ſie auf *eine*, an Gröſse willkührliche, Einheit alle bezogen und nach ihr ausgedrückt werden: ſo auch bei den Verhältniſſen der Verhältniſſe. Für ſich betrachtet kann man gar nicht ſagen, wie groſs ein Verhältniſs ſei, es muſs mit einem andern verglichen werden. Wenn man nun alle Verhältniſſe auf *ein* und daſſelbe Grundverhältniſs bezöge, und dazu die Logologen ſuchte, ſo wären mit dieſen Logologen auch die einzelnen Logologen jedes beſtimmten Verhältniſſes gefunden. Daſs dieſs möglich, erhellet alſo: man nehme irgend ein Grundverhältniſs 1..B, ſo hat dagegen jedes mögliche Verhältniſs $1..1 \mp p$, als endliche Gröſse, ein beſtimmtes Verhältniſs; es kommt alſo dem $1..1 \mp p$ ein beſtimmter Logolog in Bezug auf 1..B zu; in $1..1 \mp p$ ſind aber *alle* Verh. enthalten (S. 180), alſo kommt auch allen Verhältniſſen in Bezug auf 1..B ein beſtimmter Logolog zu. Nun ſeien einmal zwei andere Verhältniſſe als 1..B gegeben, 1..a und 1..b, ſo haben auch dieſe ein beſtimmtes Verhältniſs, alſo 1..b einen beſtimmten Logologen in Bezug auf 1..a, das iſt 1..b iſt ein beſtimmtes Vielfaches, das u-fache, von 1..a. Nun vergleiche 1..a mit 1..B, ſo hat auch 1..a gegen 1..B einen beſtimmten Logologen, ich ſetze v (d. i. 1..a iſt das v-fache von 1..B); welcher Logolog wird dem 1..b gegen 1..B zukommen? 1..b iſt das u-fache 1..a, und 1..a das v-fache von 1..B; alſo $1..a = (1..B)\,v$; daher $1..b = (1..B)\,v.u$. Umgekehrt, wenn $1..a = (1..B)\,v$, und $1..b = (1..B)\,y$, alſo der Logolog in Bez. auf 1..B für $1..a = v$, und für $1..b = y$ iſt: ſo iſt 1..a das v fache, 1..b aber das y-fache von derſelben Einheit 1..B; alſo verhält ſich $(1..a)..(1..b) = v..y = 1..\frac{y}{v}$; das iſt der Logolog für 1..b iſt $\frac{y}{v}$. Kennt man alſo den Logologen zu (1..a)..(1..b)

oder

oder nach der kürzeren Bezeichnung zu a..b, so kann man auch daraus den Logologen beider in Bezug auf ein beliebiges drittes Verh. 1..B finden; und umgekehrt.

Wenn man nun dadurch, daſs man alle Verhältnisse als Vielheiten eines beliebigen Grundverh. 1..B ausdrückt (die Logologen aller Verhh. in Bezug auf 1..B nennt), alle Logologen gegen einander ausdrückbar macht; so heiſsen die Logologen aller Verhältnisse in Bezug auf das beliebig angenommene Grundverhältniſs: *Logarithmen (Verhältniſszahlen*, oder eigentlich *Verhältniſsvielheiten*, weil sie nicht immer Zahlen sind, wenn ein Verhältniſs gegen 1..B ein idealisches Verhältniſs hat); das *Grundverhältniſs* 1..B heiſse die *Basis* der Logarithmen, oder der *Grund* des *logarithmischen Systems* (*System*, weil alles nach *einem* Maſsstabe des GV. ausgedrückt wird); auch kann man der Kürze wegen, das Hinterglied des Grundverh., B, Basis nennen.

Hieraus werden folgende Behauptungen klar sein:

1) Es giebt so viele logarithmische Systeme, als man Grundverhältnisse annehmen kann; aber jedes Verhältniſs kann als Grundverh. angenommen werden; also giebt es unendlich viele logarithmische Systeme. Die Basis kann, an sich betrachtet, ein Verh. der $>$ oder $<$ Ungl., ein endliches oder unendliches, (also B $>$ oder $<$ 1, eine Zahl oder eine unendliche Vielheit) sein.

2) Man kann im eigentlichen Verstande nicht sagen, daſs nach der Basis B, oder vielmehr 1..B einer einzelnen Gröſse, a, ein Logarithmus zukomme; denn a ist für sich kein Verhältniſs; da aber beständig die Verhältnisse, deren Logarithmen gesucht werden, der Form $1 \,..\, 1 \mp p$ sind; also z. B. 1..a; so kann man der Kürze halber blos das Hinterglied, a, angeben; daher anstatt: *der Logarithmus des Verhältnisses 1..a nach dem Grundverhältnisse 1..B* kann

kann man ſagen: *der Logarithmus von a nach der Baſis B;* oder ſogar, wenn man die Baſis als bekannt vorausſetzt: *der Logarithmus von a.*

Heiſst nun β die Baſis, ſo ſoll heiſsen $^{\beta}$l a der Logarithmus der Gröſse a nach der Baſis β.

3) Die Gröſse a, deren Logarithmus nach der Baſis β ausgedrückt wird, wird alſo als Potenz von β ausgedrückt; denn die Potenzen (vor. §.) entſtehen durch Vervielfachung der Verhältniſſe 1 . . 1 + p. Wenn nun $^{\beta}$l a geſucht wird, ſo fragt man eigentlich: ein Wievielfaches iſt das Verhältniſs 1 . . a vom Verhältniſs 1 . . β, *oder:* welcher Logolog kommt 1 . . a gegen 1 . . β zu, *oder:* die wievielte Potenz iſt a von β. Wenn daher $^{\beta}$l a = u, ſo iſt $\beta^u = a$; auch: $a^{\frac{1}{u}} = \beta$; auch $\sqrt[u]{a} = \beta$.

Es ſei z. B. β = 2 und a = 16, so iſt ^{2}l 16 = 4; alſo $2^4 = 16$ (d. i. $\beta^4 = a$), und $16^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16} = 2, = \beta$.

4) Wenn zwei Gröſsen gegeben ſind, ſo haben ihre Logarithmen nach jedem Syſteme (nach jeder Baſis) einerlei Verhältniſs.

Die beiden Gröſsen heiſsen a und b, die eine Baſis β, die andere γ; $^{\beta}$l a = m, $^{\beta}$l b = n; $^{\gamma}$l a = μ; $^{\gamma}$l b = ν. So iſt: m . . n = μ . . ν.

Denn (1 . . a) . . (1 . . b) iſt nur ein beſtimmtes Verhältniſs, d. i. a und b haben nur einen beſtimmten Logologen, u; es iſt alſo (1 . . b) = (1 . . a) . u, alſo (1 . . a) . . (1 . . b) = 1 . . u. Wenn man nun dieſe beiden Verhältniſſe nach einerlei drittem ausdrückt, z. B. nach 1 . . β, oder 1 . . γ (weil dieſs beliebig, 1 d §), ſo iſt 1 . . a ein Beſtimmtvielfaches von 1 . . β, ich ſetze das m-fache; alſo 1 . . b von 1 . . β das m . u-fache; auch iſt 1 . . a von 1 . . γ ein

ein Beſtimmtvielfaches, ich ſetze das μ-fache; alſo 1..b davon das μ.ufache. Sind alſo β und γ Baſen zweier verſchiedener logar. Syſteme; ſo iſt ${}^{\beta}$la $=$ m, ${}^{\beta}$lb $=$ m.u; ${}^{\gamma}$la $= \mu$; ${}^{\gamma}$lb $= \mu$.u.

Alſo:

βla .. βlb $=$ m .. m.u; ferner

γla .. γlb $= \mu$.. μ.u; aber

m..m.u $= \mu$.. μ.u (S. 213, bb,); alſo weil

m.u $=$ n und μ.u $= \nu$, iſt:

m..n $= \mu$.. ν; wie zu erweiſen war.

Man kann daher die Logarithmen des einen Syſtems ſogleich in Logarithmen des andern verwandeln, wenn man den Logologen der Baſen kennt; wie dieſs im andern Theile gezeigt werden ſoll.

5) Der Logarithmus 1 iſt in jedem Syſteme $=$ 0 (oder 1..1 iſt das Nullfache jedes Grundverhältniſſes; denn kein Vielfaches irgend eines Verhältniſſes giebt zum Hintergliede 1, wenn das Vorderglied auch 1 iſt (vergl. 29). Vielleicht findet man folgenden Beweis hievon evident:

Der Logar. 1 in jedem Syſt. $=$ 0, *oder:* das Verhältniſs 1..1 iſt das 0-fache jedes Verhältniſſes, *heiſst auch:* 1..1 hat zu 1..1 $\mp$ p gar kein Verhältniſs (gar keinen Logologen alſo auch keinen Logarithmen). Das Verhältniſs 1..1 $=$ 0..0, auch $=$ *das abſolut Unendliche* zum absolut Unendlichen (U.. U). Da nun Endliches zu Unendlichem gar kein Verh. hat (3), so hat auch (0..0 $=$ 1..1 $=$ U..U)..(1..1 $\mp$ p) gar kein Verhältniſs. Alſo iſt auch 1..1 $=$ 0..0 $=$ U..U kein Vielfaches von 1..1 $\mp$ p; alſo giebts auch für 1..1 keinen Logarithmen; das iſt der Log. 1 in jedem Syſtem $=$ 0. Oder auch: alſo iſt 1 die 0-te Potenz jeder Wurzel (S. 302).

6) Ne-

6) Negative Gröſsen haben keine beſonderen Logarithmen, ſondern dieſelben als die poſitiven Gröſsen.

Denn negative Gröſsen haben zu negativen daſſelbe Verh. als poſitive zu poſitiven; da es überh. um die Gröſse der Verhh. zu beſtimmen, nicht auf die + oder — ihrer Glieder ankommt (§. 14).

7) Das logarithmiſche Syſtem, deſſen man ſich gewöhnlich bedient, iſt nach der Baſis 10 berechnet; und man verſtehet daher, wenn nicht das Gegentheil erinnert wird, unter l a = ^{10}l a. Nach dieſer Baſis iſt alſo l 1 = 0, l 10 = 1, l 100 = 2, l 1000 = 3 u. ſ. w.

Nimmt man die Baſis 8 an, ſo erhält man

zu	1	2	4	8	16	32	64	
den Logar.	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{6}{3}$	
in Decimalbr.	0	0,3.	0,6.	1,0	1,3.	1,6.	2,0	

8) Wenn man die Logarithmen der Gröſsen < 1 mit denen der Gröſsen > 1 vergleicht, ſo müſſen erſtere in Bezug auf letztere negativ ſein. Denn von jeder Baſis β iſt l 1 = 0, und jedes Verh. der > Ungl. giebt in jeder Potenz (in jeder Vielheit) ein Verhältniſs der > Ungleichheit, jedes der < Ungleichh. aber giebt in jeder Potenz auch ein Verh. der kleineren Ungleichheit; ſoll daher ein Grundverhältniſs durch beſtimmte Vielheit ein Verhältn. der entgegengeſetzten Ungl. geben, als es ſelbſt iſt, ſo muſs es umgekehrt werden. Das Nichts, 0, für die Gröſse der Verhältniſſe iſt alſo 1 . . 1; 1 . . 1 + p kann nur aus einem andern 1 . . 1 + p entſtehen, alſo zu 1 + p nur ein poſitiver Logar. gehören, wenn die Baſis auch ein Verhältniſs 1 . . 1 + p, alſo 1 + p iſt; alſo jedes Verh. 1 . . 1 — p kann nur vom umgekehrten Grundv. der gröſsern Ungleichheit entſtehen, hat alſo negativen Logarithmen. Und umgekehrt, wenn das Grundverhältniſs 1 . . 1 — p iſt, ſo haben

ben auch nur Gröſsen $<$ 1 poſitive Logarithmen, die aber, ſo $>$ als 1, negative. Man kann daher nicht ſagen, daſs *allgemein* Gröſsen $<$ 1 negative Logarithmen haben; ſondern es kommt darauf an, ob das Grundverh 1 .. + oder — p, alſo die Baſis 1 + p oder 1 — p iſt. *Iſt daher die Baſis* 1 + p *d. i.* $>$ 1: ſo gehören zu Gröſsen $<$ 1, negative, zu 1 keiner, und zu jeder Gröſse $>$ 1 poſitive Logg; *iſt aber die Baſis* 1 — p, ſo gehören zu allen Gröſsen $<$ 1 poſitive, zu 1 keiner, zu allen Gröſsen $>$ 1 negative Logarithmen. Gründlich kann dieſs alles erſt im zweiten Theile bewieſen werden, und ich habe den 5ten und dieſen Satz dieſes §. mehr hergeſetzt, um dem Leſer die Nothwendigkeit einer umfaſſenden und gründlichen Erkenntniſs dieſer Lehre zu zeigen, und hierüber bei Angehenden das Nachdenken zu wecken.

9) Hierbei entſtehen vorzüglich folgende Aufgaben, die Logarithmen betreffend:

a) Wie werden ſie berechnet?

b) Welches Syſtem iſt das bequemſte?

c) Wenn die Baſis ein endliches Verb. iſt; haben dann alle Zahlen endliche Logarithmen, oder können Zahlen idealiſche Logarr. haben; und welches ſind dergleichen Zahlen? Welcherlei Logarr. kommen dann idealiſchen Vielheiten der Einheit zu, endliche oder unendliche, oder beiderlei, und in welchen Fällen?

Oder:

Fallen endliche Vielheiten eines endlichen Verhältniſſes (endliche Logarithmen, Logarr. welche Zahlen ſind) auf Gröſsen, die gegen die abſolute Einheit incommenſ. ſind, oder immer auf ſolche, die gegen die abſ. Einheit commenſurabel (Zahlen der abſ. E.) ſind?

Und

Und umgekehrt:

Fallen unendliche Vielheiten (idealiſche Logarithmen; Logarr., die keine Zahlen ſind) endlicher Verhh. auf Gröſsen, die zur abſ. E. inc., oder können ſie auch auf Gröſsen fallen, die gegen die abſ. Einh. comm. (Zahlen derſelben) ſind?

d) So auch, wenn das Grundverh. ein unendliches iſt, dieſelben Fragen unter c).

e) Welches iſt der Gebrauch der Logarithmen für die Wiſſenſchaft und beſtimmte Ausrechnungen?

Alle dieſe Fragen können erſt in der Folge beſtimmt, und gründlich beantwortet werden.

36.

Wenn unter *Verhältniſs* die Beſtimmtheit der Gröſse zweier Gröſsen gegen einander (3) verſtanden wird, ſo kann dieſs *Verhältniſs* nur auf die in 17 b u. ff. gezeigte Art erkannt werden. Der Anfang der Beſtimmung des Verhältniſſes von a..b wird aber dadurch gemacht, daſs man den Unterſchied beider ſucht. Wenn man nun in der Beſtimmung des Verh. a..b nicht weiter geht, als bis zur Anſchauung des Unterſchiedes, ſo erkennt man zwar das Verh. a..b einigermaſsen, nicht aber vollſtändig. Da aber jede 2 Gröſsen, welche ungleich ſind, einen beſtimmten Unterſchied haben, und ihr Unterſchied auch durch die Vergleichung (das Verhalten) beider gegen einander beſtimmt wird: ſo kann man dieſe beſtimmte Beſchaffenheit des Unterſchieds zweier Gröſsen für ſich betrachten, und dieſelbe *Unterſchiedsverhältniſs* oder *Differenzverhältniſs* nennen. Der Name *arithmetiſches Verh.* iſt darum nicht paſſend, weil jedes Verhältniſs arithmetiſch iſt; ſo wie auch das Verhältniſs der Gröſsen gegen einander (17 b) mit Unrecht *geometriſch* genannt wird, im Gegenſatz des

arith-

arithmetiſchen; indem ſich auch jedes *Differenzverhältniſs* geometriſch darſtellen läſst. Unter *Verhältniſs* ſchlechthin verſtehe ich das ſogenannte *geometriſche*, unter *Differenz-verh.* aber das *arithmetiſche.*

Hiebei aber iſt genau vor allem zu bemerken, daſs auf das + oder — (13 b) nicht Rückſicht genommen, ſondern blos der Unterſchied der Gröſsen betrachtet werde. Wenn nun 2 Gröſsen a und b gegeben ſind, und a > b; ſo findet man den Unterſchied, d, zwiſchen beiden, wenn man a — b nimmt; alſo a — b = d; auch wenn a < b wenn man a — b nimmt, nur daſs dann d negativ wird, das iſt z. B. 7 — 4 = 3, 4 — 7 = — 3. Daher wird auch gewöhnlich das Differenzverh. von a zu b mit a — b angezeigt; es iſt aber nöthig, dafür ein beſtimmtes eigenes Zeichen zu haben. Ich will alſo das Unterſchiedsverh. von a zu b durch a „ b andeuten; UV. heiſse Unterſchiedsverhältniſs, d die Differenz.

A.

1) Jedes UV. erfordert 2 endliche Glieder, a und b; in a „ b iſt a das Vorderglied, b das Hinterglied.

2) Wenn a . ? . b, ſo iſt auch a ſowohl als b gegen ihren Unterſchied, d, . ? . (17, b). Demnach giebt es, wenn es . ? . Verhältniſſe giebt, auch incommenſurable Unterſchiedsverhältniſſe; wenn aber a . , . b, so iſt auch a und b gegen den Unterſchied beider . , . . Ein incommenſ. UV. heiſse a , ? , b, ein commenſurables a, , , b.

3) a „ b iſt durch den Unterſch. d beſtimmt; daher kann d *Name* oder *Exponent* des UV. heiſsen.

4) Wenn a ≷ b, ſo iſt zwar a „ b und b „ a in ſofern gleich, als *an ſich* immer derſelbe Unterſchied bleibt; in ſofern aber entgegengeſetzt, als zu b „ a die negative d gehört,

gehört, als die ist, die zu a „ b gehört. Es heifse alfo a „ b das directe, b „ a aber das indirecte (reciproke) UV.: fo gehört zum indirecten UV. dieselbe, aber negative Differenz; z. B. $11 - 7 = 4$; aber $7 - 11 = -4$.

5) Durch a und d, ist b; durch a und b, d; durch b und d, a bestimmt.

6) Wenn man das Unterschiedsverhältnifs genau anschauen will, fo mufs man a, b und d auf gemeinschaftliche Einheit bringen, alfo a..b kennen; es setzt alfo das fogenannte arithm. V. das fog. geometrische voraus. Unvollständiger wäre die Anschauung des UV. wenn man blos d nach irgend einer absoluten Einheit ausdrückte, ohne das Verh. von a..b zu kennen.

7) Wenn $a > b$, fo heifst das UV. *der gröfseren Ungleichheit*; wenn aber $a < b$, *der kleineren Ungleichheit*.

8) Wenn in a und b *an fich Gleiches* dazu gefetzt oder davon weggenommen wird, fo bleibt a „ b ungeändert.

Denn es fei Fig. 68 a „ b unterschieden um d; man fetze zu a und b c; fo hebt fich bei der Vergleichung c und c auf.

Oder Fig. 69, nehme man von a und b c weg; fo ist; weil $a - c = a - c$, derselbe Rest für $(a - c)$ „ $(b - c)$ als für a „ b.

9) Ein allgemeiner Ausdruck für jedes UV. ist demnach a „ $a \mp d$; für UV. der > Ungleichh. a „ $a - d$; der kleineren a „ $a + d$.

10) Wenn man a und b durch gleiche Zahlen multiplicirt oder dividirt, fo bleibt nicht daffelbe d, alfo nicht daffelbe UV., fondern im neuen UV. ist d des ersteren

auch

auch mit derselben Zahl multiplicirt oder dividirt vorhanden. Also

$$a \,,,\, b \text{ giebt } d, \quad an \,,,\, bn \text{ giebt } dn$$

$$a\frac{n}{m} \,,,\, b\frac{n}{m} \text{ giebt } d\frac{n}{m}$$

$$a \,,,\, b \text{ giebt } d, \quad a:n \,,,\, b:n \text{ giebt } d:n$$

$$a:\frac{n}{m} \,,,\, b:\frac{n}{m} \text{ giebt } d:\frac{n}{m}.$$

Denn wenn a und b mit n multiplicirt wird, so ist diess $= an \,,,\, (a+d)\,n = an \,,,\, an + dn$ (wo n *jede* Vielheit bedeutet).

Und wenn a und b mit n dividirt wird, so ist $a:n \,,,\, b:n = a:n \,,,\, (a+d):n = (a:n) \,,,\, (a:n+d:n)$ (wo ebenfalls n *jede* Vielheit bedeutet).

(§. 19, vergleiche §. 32.).

11) Vergleicht man diese Veränderungen des UV. mit den gleichen des *Verhältnisses* (22); so findet sich: dass, wenn nach 8 das UV. unverändert bleibt, das Verhältniss a..b gestört werde; weil Gleiches zu Ungleichem nicht einerlei Verhältniss hat; z.B.

$$3 \,,,\, 11 = 3+2 \,,,\, 11+2 = 5 \,,,\, 13; \text{ aber}$$
$$3 \,..\, 11 < 3+2 \,..\, 11+2 = 5 \,..\, 13.$$

Wenn ferner nach 10, a ,, b gestört wird, bleibt a..b unverändert; das ist z.B.

$$an \,,,\, bn \gtrless a \,,,\, b; \text{ aber } (22, \text{ S. } 173.).$$
$$an \,..\, bn = a \,..\, b.$$

B.

1) Zwei gleiche UVe. bilden eine *Unterschiedsproportion* (Unterschiedsverhältnissgleichheit). Wenn also

a ,, b

a ,, b = e ,, f, ſo iſt a ,, a $\mp$ b = e ,, e $\mp$ d; z. B 5 ,, 7 = 11 ,, 13 = 5 ,, 5 + 2 = 11 ,, 11 + 2.

Die Terminologie der Sätze und Glieder iſt wie bei der Proportion (23). UP. heiſse Unterſchiedsproportion.

2) Da man von jeder Gröſse aus dieſelbe Gröſse hinzuſetzen kann, ſo iſt auch eine *ſtetige* UP. (proportio arithmetica continua) von unendlich vielerlei Art möglich; z. B. 3 ,, 7 = 7 ,, 11 allgemein a ,, a $\mp$ d = a $\mp$ d ,, a $\mp$ d $\mp$ d = a ,, a $\mp$ d = a $\mp$ d ,, a $\mp$ (d + d) = a ,, a $\mp$ d = a $\mp$ d ,, a $\mp$ 2 d.

3) Wenn in einer UP. der eine Satz .?, , ſo iſt es nicht eben allemal der andere (A d. §. , 8.); und wenn der eine comm. ſo nicht eben allemal auch der andere (ebend.).

4) Die Summe anomologer Glieder iſt in jeder UP. gleich; denn in dem allgemeinen Ausdrucke (1) iſt a + (e $\mp$ d) = (a $\mp$ d) + e.

In der ſtetigen alſo (3) in a ,, a $\mp$ d = a $\mp$ d ,, a $\mp$ 2 d iſt a + (a $\mp$ 2 d) = (a $\mp$ d) + (a $\mp$ d); das iſt, das mittlere Glied iſt die Hälfte der Summe der beiden äuſerſten; alſo in a ,, b = b ,, f iſt b = (a + f): 2 = $\frac{a + f}{2}$; z. B. in 7 ,, 5 = 5 ,, 3 iſt $\frac{7 + 3}{2} = 5$.

5) In einer diſcreten UP. ſind alle 4 Glieder durch 3 Glieder, oder durch 2 Glieder verſchiedener Sätze und den Unterſchied beſtimmt.

In einer ſtetigen aber ſind alle 3 Glieder, durch 2; oder durch 1 und d beſtimmt.

(Folgt unmittelbar aus dem Vorigen).

6) Wenn

6) Wenn a > b, ſo iſt auch e > f, und umgekehrt.

7) Eine geom. Prop. kann keine UP. ſein, und umgekehrt, wenn a Z e; denn Gleiches hat zu Ungleichem nicht einerlei Verhältniſs (22, 24). z. B.

2 „ 5 = 7 „ 10
aber
2 . . 5 Z 7 . . 10

weil 3 gröſser gegen 2, als gegen 7.

8) Ich will noch kurz betrachten, bei welchen Veränderungen ihrer Glieder eine UP. verändert werde, und bei welchen ſie bleibe. Wenn UP. bei den Veränderungen bleibt, ſo iſts entweder die gleiche oder eine andere.

a) *Veränderungen d. UP. durch Verſetzung.*

Von den 24 hier (S. 200.) möglichen Fällen bleiben 8, in den andern wird die UP. zerſtört. Sie ſind:

1) a b e f; die Grundunterſchiedsproportion.

2) b a f e; iſt die bloſe Umkehrung; wenn aber die directen Verhh. = ſind, ſinds auch die indirecten.

3) e f a b; die bloſe Verſetzung der Sätze in 1.

4) f e b a; bloſe Umkehrung der Glieder in 3.

5) a e b f; weil die Summe anomologer Glieder mit 1 dieſelbe iſt.

6) e a f b; iſt bloſe Umkehrung von 5.

7) b f a e; die bloſe Verſetzung der Sätze von 5.

8) f b e a; die Umkehrung der Glieder von 7.

b) *Ver-*

b) *Veränderungen d. UP. durch Vergröſserung oder Verkleinerung der Glieder.*

A. *Wenn ein Glied in Gröſse verändert wird*, ſo wird die UP. ganz geſtört; weil in einem Satze ein anderer Unterſchied wird.

B. *Wenn 2 Glieder verändert werden;* ſo ſind dieſe

1) *aus demſelben Satze;* ſo kann nur dann UP, und zwar die gleiche, bleiben, wenn beide um Daſſelbe vergröſsert oder verkleinert werden; nicht aber, wenn man beide durch dieſelbe Zahl multiplicirt oder dividirt (A 8, 10).

2) *aus verſchiedenen Sätzen;* alſo

a) *homologe Glieder;* ſo wird

α. zu beiden Gleiches hinzugeſetzt oder von beiden Gleiches weggenommen, ſo bleibt UP. aber eine andere, denn, wenn $a „ b = e „ f = a „ a+d = e „ e+d$, ſo iſt auch $a \mp m „ a+d = e \mp m „ e+d$; welches ſchon daraus zu erſehen, weil die Summen anomologer Glieder gleich ſind; urſprünglich aber aus der gleichen Vermehrung oder Verminderung der Differenzen in beiden Sätzen hervorgeht.

β. Es wird Ungleiches hinzugeſetzt oder hinweggenommen; ſo wird die UP, wegen der ungleichen Vermehrung oder Verminderung der Differenz in beiden Sätzen, ganz aufgehoben.

γ. Eben ſo wird der Unterſchied in beiden Sätzen durch Multiplication oder Diviſion beider Glieder auf ungleichförmige Art verändert, alſo die UP. ganz zerſtört. Denn wenn a Z e, ſo iſt auch n a Z n e, auch a:n Z e:n; alſo iſt auch (n—1) a

oder $na - a \;Z\; (n-1)\,e$ oder $ne - e$; alſo auch

$$a \mp (n-1)a \;,,\; a+d \;Z\; e+(n-1)\,e \;,,\; e+d$$

dieſer Ausdruck aber iſt gleich dem:

$$na \;,,\; a+d \;Z\; ne \;,,\; e+d$$

b) *anomologer Glieder;* dieſe Fälle überlaſſe ich, weil ſie aus den vorigen zuſammengeſetzt ſind, wegen der hier nothwendigen Kürze, dem Leſer zu entwickeln.

C. *Wenn 3 Glieder verändert werden*, entſpringen wieder viele untergeordnete Fälle; die ich ebenfalls hier nicht aufführen will.

D. *Wenn 4 Glieder verändert werden;* ſo ſind folgende die für die Folge merkwürdigſten Veränderungen:

1) Alle 4 Glieder, oder je 2 deſſelben Satzes, werden um Daſſelbe vermehrt, oder alle vermindert; ſo bleibt die gleiche UP.; weil (A, 8.) die Differenz in beiden Sätzen unverändert bleibt.

2) Alle 4 Glieder werden durch die gleiche Vielheit multiplicirt oder dividirt; ſo wird in beiden Sätzen d auf gleiche Art verändert (A, 10), es entſteht alſo eine andere UP; z. B. aus $2 \;,,\; 3 = 5 \;,,\; 6$ bilde $2.2 \;,,\; 3.2 = 5.2 \;,,\; 6.2 = 4 \;,,\; 6 = 10 \;,,\; 12$.

Ich habe nicht für zweckmäſsig gefunden, hier alle mögliche Fälle, wie in §. 22 und §. 24 zu erſchöpfen, wegen der wenigen Anwendung für folgende Lehrſätze und der Kürze dieſes Buches; an ſich aber iſt dieſe vollſtändigere Betrachtung gleich würdig und intereſſant, als bei der Verhältniſsproportion.

37.

So wie man durch Setzen oder Wegnehmen der Verhältniſſe, alſo durch Multiplication und Diviſion von jeder

Gröſse

Gröſse a auf beliebige Weiſe eine b, c, d, e.... ins Unendliche bilden kann, wodurch unendlicherlei Verhältnisreihen (*geometriſche Reihen, Progreſſionen*) entſtehen (§. 31): ſo kann man auch durch Daranſetzen oder Hinwegnehmen beſtimmter Unterſchiede (Differenzen) unendlicherlei *Reihen* bilden, welche gewöhnlich *arithmetiſche* heiſsen. Wird immer derſelbe Unterſchied genommen, ſo nennt man ſie vorzugsweiſe *arithmetiſche Progreſſionen*, welcher Name ſeiner Natur nach viel allgemeiner iſt. Die Reihe der ganzen Zahlen iſt eine ſolche Reihe der einfachſten Art, mit beſtändiger Differenz 1. Einige andere ſind

1, 3, 5, 7, 9, 11.... Differenz 2.
11, 14, 17, 20.. Differenz (d) 3.
1, $\frac{5}{3}$, $\frac{7}{3}$, 3, $\frac{11}{3}$, $\frac{13}{3}$, 4... d = $\frac{2}{3}$.
1, 3, 6, 8, 11, 13, 16.... d abwechſelnd 2 und 3.
a, a + d, a + 2d, a + 3d

Die Differenzen, welche man nach einander nimmt, können ſelbſt jede mögliche geometriſche oder arithmetiſche Reihe ſein; z. B. wenn man nach der beſtändigen Differenz 1 die Reihe

A, 1, 2, 3, 4, 5 erhalten hat, und die Glieder derſelben ſelbſt nach der Reihe als Differenzen einer neuen ſetzt, ſo erhält man

B, 1, 3, 6, 10, 15 erſte ſummirende Reihe von A; aus dieſer auf die gleiche Weiſe:

C, 1, 4, 10, 20, 35 2te ſummirende Reihe von A, u. ſ. f. ins Unendliche.

Auch kann man arithmetiſche und geometriſche Conſtruction auf unendlicherlei Art mit einander verbinden; z. B. die Reihe der Potenzen von 2 iſt

1, 2, 4, 8, 16 . . . ; wenn man zu jedem Gliede 3 ſetzt, ſo kommt die Reihe:

4, 5, 7, 11, 19

Ein Beiſpiel einer noch andern Art von Reihe iſt folgendes:

A	1,	4,	9,	16,	25,	36	. .
B	2,	2,	3,	4,	5,	6	. .
C	2,	6,	12,	20,	30,	42	. .

A enthält alle Quadratzahlen der Wurzeln 1, 2, 3 . . . die in B darunter ſtehen, C beider Summen; ſolche Zahlen heiſst man *Pronikzahlen*, und dieſe Reihe die *Reihe der Pronikzahlen*.

Dieſe Reihen ſind ein unendlicher Gegenſtand arithmetiſcher Betrachtung; daher auch im andern Theile an ſeinem Orte die Anfangsgründe davon erklärt werden ſollen.

Die nächſte Betrachtung ſei, die Natur der Brüche im Allgemeinen ſowohl, als in ihren beſondern Arten genauer als oben §. 9. zu erkennen; um hernach die Addition, Subtraction, Multiplication und Diviſion auch für Brüche im Beſonderen zu erklären.

38.

(Zuvor iſt 9 wieder genau zu überdenken).

Um Gröſsen von einerlei Art vergleichbar zu machen, muſs man ſie insgeſammt auf eine und dieſelbe Einheit beziehen, die ich die abſolute, A, (9. S. 54.) nenne; ſie als Vielheiten dieſer abſoluten Einheit betrachten, und alle als Vorderglied eines Verh. anſehen, deſſen beſtändiges Hinterglied A d. i. 1 iſt.

Gröſsen

Gröſsen, welche zu A commenſurabel ſind, bilden Zahlen von A; Gröſsen aber, welche gegen A .?. können nie ganz genau, wiewohl immer und immer genauer (17, b) nach A in Zahlen ausgedrückt werden.

Gröſsen, welche gegen A, $=$ 1, im Verhältniſſe der gröſseren Ungleichheit ſtehen, und von A ſelbſt gemeſſen werden (quae ſunt in rat. multiplici ad A), ſind *ganze Zahlen* von A; für ſich alſo kann keine Gröſse eine ganze Zahl heiſsen, ſondern nur in Bezug auf eine ſtillſchweigend vorausgeſetzte abſolute Einheit; daher auch jede ganze Zahl, z. B. 3 eigentlich (9. S. 55.) geſchrieben werden ſollte wie $\frac{3}{1}$. Daraus folgt, daſs Gröſsen, die gegen A .?. ſind, keine ganzen Zahlen von A ſein können.

Alle Gröſsen, die gegen A keine ganzen Vielheiten (ganze Zahlen) ſind, die alſo gegen A in einem andern Verhältniſſe, als in ratione multiplici ſtehen, ſollen *gebrochne Gröſsen* (*magnitudines fractae*) der abſoluten Einheit heiſsen. Es iſt daher ebenfalls eine beſtimmte Gröſse nicht *für ſich*, ſondern erſt in Bezug auf eine abſolute Einheit, eine *gebrochne* Gröſse. Ich will jede gebrochne Gröſse B nennen. Soll nun z. B. F. 70 B als Vielheit von A ausgedrückt werden, ſo iſt dieſs B $<$ 1, daher von A keine ganze Zahl; man muſs daher, um das Verhältniſs von B zu A zu finden, eine andere Gröſse oder Einheit auſer A ſuchen, welche ſowohl A als B miſst (17 b); dieſe heiſse m; ſo wird man B nach A ausdrücken können, wenn man weiſs, wie viele ganzemale genommen m A giebt, und wie viele ganzemale genommen m B giebt; z. B. wenn 4m $=$ B und 5m $=$ A, ſo verh. ſich B .. A $=$ 4 .. 5. (denn die Einheit iſt beſtändig Hinterglied); wenn man demnach angiebt, wie aus A m gebildet werde, und wie viele Mal dann m genommen werden müſſe um B zu geben, ſo kann man B aus A bilden, und B iſt nach A ausge-

gedrückt; man gebe alſo an, als welche Vielheit A angeſehen (durch welche Vielheit A *dividirt* werden) müſſe, um das, A und B gemeinſame Maſs m zu erhalten, und ſetze dieſe Vielheit, weil A Hinterglied, *unter den Strich;* man gebe ferner an, welche Vielheit von m conſtruirt werden müſſe, um B zu erhalten, und ſetze dieſe Vielheit, weil B Vorderglied, *über den Strich;* im Beiſpiele alſo $\frac{4}{5} = \frac{B}{A}$; ſo drücken dieſe beiden Vielheiten (wenn m gefunden, dieſe beiden Zahlen) das Verhältniſs von $B..A = \frac{B}{A} = 4..5 = \frac{4}{5}$ aus. Die untere Zahl heiſse der *Theiler* (der abſol. E.) oder der *Nenner* (denominator), die obere der *Zähler* (Numerator), und das ſo ausgedrückte Verhältniſs von B..A *der Bruch* (fractio; wenn er eine Zahl iſt: numerus fractus).

Jeder Bruch muſs daher einen Nenner und Zähler haben, und iſt durch die abſ. Einheit, Nenner und Zähler individuell (vollendet) beſtimmt.

Der Nenner alſo giebt an, das Verhältniſs der abſoluten E. zu dem für die abſ. Einheit und die Bruchgröſse gemeinſ. Maſse m. (das Verh. m..A); man muſs daher um m zu erhalten, die abſolute Einheit als die Vielheit des Nenners anſehen, oder: *durch den Nenner dividiren.*

Der *Zähler* aber giebt das Verhältniſs des gem. Maſses für A und B (des m) zur Bruchgröſse B (das Verh. m..B) an; um alſo B zu erhalten, muſs man m mit der Vielheit des Zählers multipliciren oder von m aus die Vielheit des Zählers conſtruiren.

Man erhält daher den Werth jedes Bruchs (die Bruchgröſse, B), wenn man die abſolute Einheit durch den Nenner dividirt, und den Quotienten durch den Zähler mul-

multiplicirt; wenn also $\frac{u}{v}$ jeden möglichen Bruch bedeutet, so erhält man seinen Werth, wenn man nimmt (1 : v) u; z. B. $\frac{5}{7}$ = (1 : 7) 5.

Auch erhält man den Werth von $\frac{u}{v}$, wenn man 1 erst mit u (dem Zähler) multiplicirt, und dann das Product durch den Nenner dividirt; also $\frac{u}{v}$ = (1 . u) v : v. Denn es sei z. B. $\frac{3}{4}$ gegeben, so ist diess = (1 : 4). 3; wenn ich nun 1 . 3 nehme, so ist diess 4mal so gross, als (1 : 4) 3; wenn ich dann 1 . 3, welches 4mal so gross als (1 : 4) 3 ist, wieder als das 4-fache ansehe, das ist durch 4 dividire, so erhalte ich den 4ten Theil des Vierfachen, also das Einfache; also ist auch (1 : 4). 3 = (1 . 3) : 4. Allgemein: wenn ich anstatt (1 : v). u, nehme 1 . u, so ist 1 . u das v-fache von (1 : v). u; wenn ich also 1 . u als das v-fache ansehe, und die Einheit dazu suche, so muss wieder das Einfache herauskommen; also (1 : v) u = (1 . u) : v sein.

Brüche, welche zu derselben absoluten Einheit gehören, sind vollkommen durch ihren Nenner und Zähler bestimmt, weil durch beide das Verh. B . . A durchgängig bestimmt ist; woraus auch folgt, dass man mit Nenner und Zähler, unbeschadet des Werthes des Bruches alle die Veränderungen vornehmen könne, welche nach 22 ein Verhältniss nicht stören. Wie das Verhältniss des Zählers zum Nenner, $\frac{u}{v}$, wächst oder abnimmt, so nimmt auch der Bruch zu oder ab; denn je grösser v, als eine je grössere Vielheit wird 1 angesehen um m, das gem. Mass für A und B, zu finden, je kleiner also m, desto kleiner bei gleichem Zähler, die Bruchgrösse; dadurch wird

wird aber auch $\frac{u}{v} = u \,..\, v$ ein kleineres Verhältniſs (17 b, S. 108.); ſo wie aber der Zähler u zunimmt, eine deſto höhere Vielheit wird, bei gleichem Nenner, von m aus conſtruirt, um die Bruchgröſse B, zu erhalten, deſto gröſser alſo auch B; dadurch wird aber auch das Verh. $u \,..\, v = \frac{u}{v}$ vergröſsert (S. 108, a). Diejenigen Veränderungen alſo von $u \,..\, v = \frac{u}{v}$, welche nach 22 $u \,..\, v$ vergröſsern, vergröſsern auch den Werth des Bruchs $\frac{u}{v}$; und umgekehrt, die Veränderungen von $u \,..\, v$ die $u \,..\, v$ verkleinern, verkleinern auch den Werth des Bruchs $\frac{u}{v}$.

Der Werth des Bruchs, B, ſteht alſo mit dem Nenner in umgekehrtem, mit dem Zähler aber in directem Wachsthume.

Wenn man daher das Verhältniſs zweier oder mehrerer Brüche ſucht, die zu *einer* abſol. E. gehören: ſo iſt ihr Verhältniſs zuſammengeſetzt aus dem directen Verhältniſſe der Zähler, und aus dem indirecten der Nenner (29.). Es ſeien daher zwei Brüche $\frac{u}{v}$ und $\frac{\varkappa}{\varphi}$ gegeben, ſo iſt

$$\frac{u}{v} \,..\, \frac{\varkappa}{\varphi} = \frac{\begin{matrix} u \,..\, \varkappa + \\ -(v \,..\, \varphi) \end{matrix}}{u\varphi \,..\, \varkappa v} = \frac{\begin{matrix} u \,..\, \varkappa + \\ \varphi \,..\, v \end{matrix}}{u\varphi \,..\, \varkappa v}$$

$$\text{z. B. } \tfrac{3}{7} \,..\, \tfrac{5}{9} = \frac{\begin{matrix} 3 \,..\, 5 + \\ 9 \,..\, 7 \end{matrix}}{3 \cdot 9 \,..\, 5 \cdot 7} = 27 \,..\, 35.$$

Wenn

Wenn daher die Zähler unter ſich gleich, alſo u = ℵ, z. B. u und ℵ = 1, ſind, ſo verhalten ſich die Brüche umgekehrt wie ihre Nenner; das iſt

$$\frac{u}{v} \,..\, \frac{u}{\varphi} = \begin{array}{l} u \,..\, u + \\ \varphi \,..\, v \\ \hline u\varphi \,..\, uv = \varphi \,..\, v \end{array} \quad (22, d, \beta).$$

$$\frac{1}{v} \,..\, \frac{1}{\varphi} = \begin{array}{l} 1 \,..\, 1 + \\ \varphi \,..\, v \\ \hline \varphi \,..\, v \end{array}$$

$$\text{z. B. } \tfrac{1}{5} \,..\, \tfrac{1}{7} = \begin{array}{l} 1 \,..\, 1 + \\ 7 \,..\, 5 \\ \hline 7 \,..\, 5. \end{array}$$

(Die allereinfachſte Art der kleineren Brüche als 1 iſt dieſe : $\frac{1}{v}$; denn da iſt der Zähler zum Nenner, alſo der Werth des Bruchs zur Einheit, in ratione ſubmultiplici, welches das einfachſte Verhältniſs iſt).

Sind die Nenner in 2 Brüchen unter ſich gleich, ſo verhalten ſich die Bruchwerthe direct wie die Zähler;

$$\text{z. B. } \frac{u}{v} \,..\, \frac{\aleph}{v} = \begin{array}{l} u \,..\, \aleph + \\ v \,..\, v \\ \hline uv \,..\, \aleph v = u \,..\, \aleph \end{array} \quad (22, d, \beta).$$

Alſo iſt z. B. $\tfrac{6}{2} \,..\, \tfrac{3}{2} = 6 \,..\, 3 = 2 \,..\, 1.$

$$\tfrac{1}{5} > \tfrac{1}{6}\,;\ \frac{1}{n} > \frac{1}{n+p}\,,\ \frac{1}{n} < \frac{1}{n-p}$$

$$\tfrac{3}{7} < \tfrac{4}{7}\,;\ \frac{m}{n} < \frac{m+p}{n}\,,\ \frac{m}{n} > \frac{m-p}{n}$$

Alſo iſt ein Bruch, deſſen Zähler kleiner, der Nenner aber gröſser iſt als im andern Bruche, gewiſs < als der andere; das iſt z. B. $\tfrac{76}{100} > \tfrac{75}{101}$; allgemein $\frac{m}{n} > \frac{m-p}{n+p}$.

Wenn

Wenn man daher (22, S. 177.) Nenner und Zähler eines Bruchs, mit derselben, endlichen oder idealischen Vielheit, multiplicirt oder dividirt; so bleibt, weil das Verh. ungestört bleibt, auch der Werth des Bruchs ungeändert. Das ist

$$\frac{u}{v} = \frac{u\,x}{v\,x} = \frac{u:x}{v:x} \quad \text{z. B.} \; \frac{3}{5} = \frac{6}{10}; \; \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

Hieraus erhellet auch, dass sich derselbe Bruch auf unendlich vielerlei Arten ausdrücken lasse, wovon die bequemste die ist, wo Nenner und Zähler auf ihr grösstes gem. Mass gebracht sind, weil man dann die kleinsten Zahlen erhält (20); ein solcher Bruch heisst ein *Wurzelbruch*, oder ein solcher: *der auf die kleinste Benennung* (*den kleinsten Nenner*) *gebracht ist;* wo aber (17 b) der Nenner (auch wenn ein solcher Bruch bequem sein soll) nicht $<$ 1 sein darf; z. B. $\frac{3}{7}$ ist ein Wurzelbruch; nicht aber $\frac{3}{9}$, weil es ein grösseres gemeinsames Mass für 3 und 9 als 1 giebt, nehmlich 3; daher $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$, und $\frac{1}{3}$ ein Wurzelbruch. Man wird daher einen Bruch auf seine kleinstmögliche Benennung (in *ganzen Zahlen*) bringen, wenn man wie in 17, b mit Nenner und Zähler verfährt, und zwischen beiden das grösste gemeinsame Mass sucht; diess Verfahren will ich im nächsten § erläutern.

Nachdem wir so die Natur jedes Bruchs überhaupt erkannt haben, wollen wir die verschiedenen möglichen obersten Gattungen und Arten der Brüche betrachten. Die möglichen Eintheilungsgründe sind:

1) *Die Natur des im Bruche dargestellten Verhältnisses der Bruchgrösse zur abs. Einheit;* da ist ein Bruch entweder ein *endlicher*, wenn B . , . A also Nenner und Zähler Zahlen sind (*numerus* fractus); oder ein *unendlicher* oder *idealischer*, wenn B . ? . A, also entweder Nenner und Zähler oder eins von beiden keine Zahlen, sondern

dern unendliche Vielheiten ſind. Die ſo eben betrachtete Natur der Brüche und das aus §. 22. für ſie Abgeleitete, gilt für beiderlei Arten. Unendliche Brüche können immer genauer durch gebrochne Zahlen (endliche Brüche) ausgedrückt werden (17, b); kein unendlicher Bruch aber kann einer ganzen Zahl gleich ſein.

2) *Ob die Bruchgröſse* $>$, *oder* $<$ *als die abſol. Einheit iſt;* iſt B $<$ 1, ſo nennt man dergleichen Brüche *eigentliche Brüche* (*fractiones proprias*); in ihnen iſt der Zähler $<$ Nenner; iſt B $>$ 1, ſo nennt man dergl. Brüche *uneigentliche Brüche* (*fractiones ſpurias ſeu improprias*). Dieſe Benennung aber iſt unſchicklich, weil beide auf gleiche Art und *vollkommen* Brüche ſind; man könnte die, $<$ 1, *kleinere;* die, $>$ 1, aber *gröſsere Brüche* nennen. In den *gröſseren Brüchen* iſt der Zähler $>$ Nenner.

3) *Ob der Bruch einer ganzen Zahl gleich iſt, oder nicht;* im erſten Falle kann ein Bruch *zufällig*, im andern *nothwendig* heiſsen. So iſt $\frac{3}{7}$ ein nothwendiger, $\frac{1}{1}$ aber oder $\frac{2}{1}$, $\frac{4}{2}$, $\frac{6}{3}$, $\frac{5}{5}$ ſind zufällige Brüche. Denn wenn Zähler und Nenner $=$, ſo verhält ſich B..A $=$ 1..1, alſo auch B $=$ der abſoluten Einheit; *und es gilt daher dieſer Satz ganz allgemein.* Wenn ferner der Zähler den Nenner n-ganze-Male enthält, ſo verhält ſich B..A $=$ nv..v $=$ nv..v $=$ n..1; alſo iſt B die n-fache Einheit. Um daher zu ſehen, ob ein Bruch zufällig ſei; ſehe man wie viele Male der Nenner im Zähler iſt; z. B. weil in $\frac{9}{3}$ 3 3mal in 9, ſo iſt auch $\frac{9}{3} = 3 = \frac{3}{1}$; iſt der Nenner nicht beſtimmte ganze Male genommen $=$ dem Zähler, ſo iſt der Bruch zufällig. Eben ſo kann man jeden gröſseren Bruch, in eine Menge Einheiten nebſt einem kleineren Bruche, verwandeln, wenn man den Nenner ſo viele Mal aus dem Zähler nimmt, als angeht, und den Reſt, einen *kleineren* Bruch,

Bruch, berechnet; alſo z. B. $\frac{7}{3} = \frac{6}{3} + \frac{1}{3} = 2 + \frac{1}{3}$; allgemein $\frac{mn+p}{n} = \frac{m}{1} + \frac{p}{n} = m + \frac{p}{n}$. Auch umgekehrt kann man jede ganze Zahl als einen Bruch beliebiger Benennung ausdrücken, z. B. $3 = \frac{6}{2} = \frac{9}{3} = \frac{12}{4} \ldots$; d. i. allgemein $m = \frac{2m}{2} = \frac{3m}{3} = \frac{8m}{8}$. Alſo auch jede ganze Zahl mit angehängtem kleineren Bruche, in einen gröſseren Bruch verwandeln; z. B. $3 + \frac{1}{7} = \frac{3 \cdot 7}{7} + \frac{1}{7} = \frac{21}{7} + \frac{1}{7} = \frac{21+1}{7}$; allgemein $m + \frac{u}{v} = \frac{mv}{v} + \frac{u}{v} = \frac{mv+u}{v}$.

4) *Ob Nenner und Zähler ganze Zahlen oder ſelbſt wieder gebrochne Zahlen ſind.* Die einfachſte Form der Brüche iſt, wo Nenner und Zähler ganze Zahlen ſind, dieſe heiſsen *einfache Brüche* (*fractiones ſimplices*); allein beide können auch gebrochne Zahlen ſein, denn $\frac{u}{v} = (1 : v)\,u$, man kann aber jede Gröſse, alſo auch 1, mit jeder Vielheit multipl. und dividiren; alle dergleichen Brüche heiſsen *zuſammengeſetzte Brüche* (*fractiones compoſitae*) oder *gebrochne Brüche* (*fractiones fractae*). Ihre oberſten Arten ſind:

$\dfrac{a}{\frac{b}{c}}$ (einfach) im Nenner gebrochner Bruch.

$\dfrac{\frac{a}{b}}{c}$ (einfach) im Zähler gebrochner Bruch.

$\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ ein doppelt (im Nenner und Zähler) gebrochner Bruch.

$\frac{a}{b+c}$

$$\cfrac{a}{b+\cfrac{c}{d+\cfrac{e}{f\ldots}}} = \frac{a}{b}\,\mathrm{I}\,\frac{c}{d}\,\mathrm{I}\,\frac{e}{f}\,\mathrm{I}\ldots$$ *ein Stufenbruch, Kettenbruch, continuirlicher Bruch.*

$\frac{a}{b}\,\mathrm{I}\,\frac{c}{d}$ von 2 Stufen.

$\frac{a}{b}\,\mathrm{I}\,\frac{c}{d}\,\mathrm{I}\,\frac{e}{f}$ von 3 Stufen; u. ſ. f. ins Unendliche.

$$\frac{\frac{a}{b}\,\mathrm{I}\,\frac{c}{d}\,\mathrm{I}\,\frac{e}{f}\,\mathrm{I}\ldots}{\frac{g}{h}\,\mathrm{I}\,\frac{i}{k}\,\mathrm{I}\,\frac{l}{m}\,\mathrm{I}\ldots}$$ ein doppelter Stufenbruch.

Dieſe Geſtalten ſind, wegen ihres Vorkommens in beſtimmten Rechnungen, und beſonders die Stufenbrüche, wegen ihrer ausgebreiteten Anwendung auf gemeine und höhere Rechnungen, mit gröſster Aufmerkſamkeit und Gründlichkeit, gleich in den erſten Elementen, zu betrachten.

A.

Weil jede Gröſse gegen jede andere ein beſtimmtes Verhältniſs hat, ſo muſs auch jede Bruchgröſse gegen die abſolute Einheit ein ſolches haben; iſt dieſs Verhältniſs B..A endlich, ſo muſs es einen gemeinſamen Maſsſtab für B und A geben, alſo dieſs Verhältniſs ſich in 2 ganzen Zahlen ausdrücken laſſen, daher der Bruch als ein *einfacher Bruch* angegeben werden können.

Alle zuſammengeſetzte endliche Brüche alſo müſſen ſich zuletzt in einen einfachen Bruch verwandeln laſſen, der ihnen genau gleich iſt.

Iſt aber B.?.A, ſo kann doch wenigſtens (17, b) ein immer näherer und näherer *einfacher Zahlenbruch* angegeben werden.

Wenn

Wenn man daher die Berechnung der einfachen Brüche kennt, so kennt man auch die der zusammengesetzten, weil diese alle sich zuletzt auf einfache reduciren lassen.

B.

In Absicht der einfachen Brüche sind folgende Aufgaben zu lösen:

1) *Einen einfachen Bruch auf seine kleinste Benennung zu bringen;* man sucht zwischen Nenner und Zähler nach 17, b den grössten gemeinsamen Masstab, oder Theiler, und drückt Nenner und Zähler darnach aus; z. B. $\frac{18}{27} = \frac{9 \cdot 2}{9 \cdot 3} = \frac{2}{3}$. Hievon ein Weiteres im nächsten §.

2) *Mehrere Brüche von verschiedener Benennung auf gemeinsame Benennung zu bringen.* Alle Brüche, welche in Zahlen sich ausdrücken lassen, sind gegen einander commensurabel (24, a, 1, β, bb S. 159), haben also ein gemeinsames Mass, und es ist schon im 24. §. gezeigt worden, wie man auf zweierlei Art findet, dass $\frac{1}{p} \,..\, \frac{1}{q} = \frac{q}{pq} \,..\, \frac{p}{pq}$ (z. B. $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{7} = \frac{7}{35}$, $\frac{5}{35}$, vergleiche auch S. 328), auch $\frac{n}{m} \,..\, \frac{r}{s} = \frac{ns}{ms} \,..\, \frac{rm}{ms}$ (z. B. $\frac{3}{5} \,..\, \frac{2}{7} = \frac{3 \cdot 7}{5 \cdot 7} \,..\, \frac{2 \cdot 5}{5 \cdot 7}$). Man kann aber diess Verfahren auch so darthun: wenn 2 Brüche $\frac{n}{m}$ und $\frac{r}{s}$ auf gemeinsame Benennung gebracht werden sollen, so kommt es darauf an, einen Nenner zu finden, der sowohl durch m als durch s theilbar ist; denn wenn der neue Nenner, N, durch m theilbar ist, so kann man den m-ten Theil der Einheit nehmen, und diesen dann sovielmal als der Zähler n verlangt; wenn ferner N auch durch s theilbar, so kann man auch den s-ten Theil der 1 r-mal nehmen. Z. B. wenn $\frac{2}{3}$ und

$\frac{5}{11}$

$\frac{5}{11}$ gegeben, und man theilt 1 in 33 Theile, so kann man nach dieser Benennung $\frac{1}{3}$ nehmen; denn weil $33 : 3 = 11$, so ist $\frac{1}{3} = \frac{11}{33}$, also $\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 11}{33}$; und da 33 auch durch 11 theilbar, indem $33 : 11 = 3$, so ist auch $\frac{1}{11} = \frac{3}{33}$, also $\frac{5}{11} = \frac{3 \cdot 5}{33}$; also $\frac{2}{3} \,..\, \frac{5}{11} = \frac{22}{33} \,..\, \frac{15}{33}$. Solcher Zahlen, die durch m und s theilbar sind, giebt es unendlich viele; man kann also 2 Brüche auf unendlich vielerlei gemeinsame Benennung bringen; so eine Zahl aber, N, die durch m und s theilbar, ist gewiss $m \,.\, s = s \,.\, m$ (28), also ist

$$\frac{n}{m} \,..\, \frac{r}{s} = \frac{n\,s}{m\,s} \,..\, \frac{r\,m}{m\,s}.$$

Oder auch so: wenn man in $\frac{n}{m}$ und $\frac{r}{s}$ in jedem Bruche Nenner und Zähler durch gleiche Zahlen multiplicirt, so wird blos die Gestalt beider Brüche, nicht aber ihr Werth verändert (S. 330); also ist $\frac{n}{m} = \frac{n\,s}{m\,s}$ und $\frac{r}{s} = \frac{r\,m}{s\,m}$; weil aber $m\,s = s\,m$ (28), so hat man auch gleiche Benennung.

Da nun 2 Brüche auf unendlicherlei Art auf gem. Ben. gebracht werden können, so sucht man natürlich daraus die, deren Zahl die kleinste ist, weil man dadurch die kleinstmöglichen Zahlen für beide Brüche findet. Wiewohl nun diese Aufgabe hier noch nicht aufgelöst werden kann, so wissen wir doch, dass man die kleinstmögliche gem. Ben. für $\frac{n}{m}$ und $\frac{r}{s}$ erhalten werde, wenn man die kleinste Zahl findet, welche durch m und s theilbar ist; denn diese Zahl ist eben der gemeinsame Nenner.

Diess also gilt von endlichen Brüchen; es ist aber dasselbe vielmehr auf eine allgemeine Art zu zeigen, so dass

es

es auch von idealiſchen Brüchen, ja überhaupt von jeden Brüchen gelte. Es ſeien alſo überhaupt 2 Brüche, beliebiger Geſtalt und Art $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ gegeben, wo a, b, c, d endliche und unendliche Vielheiten bedeuten: ſo behaupte ich, daſs $\frac{a}{b} \,..\, \frac{c}{d} = \frac{a\,d}{b\,d} \,..\, \frac{c\,b}{b\,d}$; alſo die gemeinſame Benennung $b\,d = d\,b$ ſei.

Denn in $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ wird ein beſtimmtes endliches oder unendl. Verh. der Einheit zur Bruchgröſse ausgedrückt (d. §.); durch welche Veränderungen alſo der Glieder dieſs Verh. ungeſtört bleibt, dadurch bleibt auch der Werth dieſer Brüche ungeſtört. Setzt man alſo anſtatt $\frac{a}{b} = a \,..\, b$, $\frac{a\,d}{b\,d} = a\,d \,..\, b\,d$, ſo iſt $\frac{a}{b} = \frac{a\,d}{b\,d}$ (S. 177); alſo auch $\frac{c}{d} = \frac{c\,b}{d\,b}$ aus gleichem Grunde. Daher auch $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} = \frac{a\,d}{b\,d}, \frac{c\,b}{d\,b}$; dieſe beiden Brüche haben aber gleichen Nenner, denn $b\,d = d\,b$ (es mag b und d eine endliche oder idealiſche Vielheit ſein, 28).

Aus gleichen Gründen folgt, daſs allgemein $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f} = \frac{a\,d\,f}{b\,d\,f}, \frac{c\,b\,f}{b\,d\,f}, \frac{e\,b\,d}{b\,d\,f}$. Denn man nehme erſt $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$, ſo iſt dieſs $= \frac{a\,d}{b\,d}, \frac{c\,b}{b\,d}$; alſo $\frac{a\,d}{b\,d}, \frac{e}{f} = \frac{a\,d\,f}{b\,d\,f}, \frac{e\,b\,d}{f\,b\,d}$, daher auch $\frac{c\,b}{b\,d}, \frac{e}{f} = \frac{c\,b\,f}{b\,d\,f}, \frac{e\,b\,d}{b\,d\,f}$.

3) *Mehrere Brüche von verſchiedenen Zählern (verſchiedener Bezählung) auf einerlei Zähler zu bringen.*

Allge-

Allgemein wenn $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ gegeben, wo a, b, c, d jede mögliche Vielheit bedeuten; ſo iſt $\frac{a}{b} \,..\, \frac{c}{d} = \frac{a\,c}{b\,c} \,..\, \frac{a\,c}{a\,d}$. Der Beweis iſt, wie in der 2ten Aufgabe.

4) *Einen Bruch auf eine beliebige Benennung zu bringen.* Allgemein $\frac{a}{b}$ auf die Benennung c zu bringen. Man ſucht alſo zum Nenner c einen Zähler, x, ſo daſs $\frac{a}{b} = \frac{x}{c}$. Es mögen a, b, c alle Vielheiten bedeuten. Wenn $\frac{a}{b} = \frac{x}{c}$, ſo muſs a . . b = x . . c ſein (d. §. S. 325).

Nun aber iſt x (24) $= \frac{a\,c}{b}$, alſo iſt $\frac{a}{b} = \frac{\frac{a\,c}{b}}{c} = \frac{(a\,c) : b}{c}$; z. B. $\frac{3}{4}$ werde gebracht auf die Benennung 8, ſo iſt $\frac{3}{4} = \frac{24 : 4}{8} = \frac{6}{8}$.

5) *Einen Bruch auf beliebigen Zähler zu reduciren;* alſo allgemein $\frac{a}{b}$ auf den Zähler c zu bringen. Man ſucht daher den Nenner x zum Zähler c, ſo daſs $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$. Wenn $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$, ſo iſt a . . b = c . . x. Alſo (24) $x = \frac{b\,c}{a}$; daher iſt auch $\frac{a}{b} = \frac{c}{\frac{b\,c}{a}} = \frac{c}{(b\,c) : a}$. Wenn z. B. $\frac{2}{3}$ auf den Zähler 1 zu bringen, ſo iſt $\frac{2}{3} = \frac{1}{(3 \cdot 1) : 2} = \frac{1}{3 : 2} = \frac{1}{\frac{3}{2}}$.

C.

Unter den ungewöhnlicheren Geſtalten der Brüche ſind vorerſt die *gebrochenen Brüche* zu betrachten, ihre Natur

zu erkennen, und zu zeigen, wie ſie (A) auf einen gewöhnlichen Bruch gebracht werden können.

a) Zuförderſt alſo die *einfachen im Nenner gebrochenen Brüche*, der allgem. Form: $\frac{a}{\frac{b}{c}}$ (z. B. $\frac{3}{\frac{4}{5}}$), wo a, b, c jede mögliche Vielheit bedeuten.

Es ſei z. B. $\frac{1}{\frac{2}{3}}$ gegeben, ſo heiſst dieſs, der Definition des Bruchs überhaupt (S. 325) gemäſs: man ſoll die Bruchgröſse finden, die man erhält, wenn man 1 als $\frac{2}{3}$ anſieht, und den Quotient 1mal nimmt. Denn wenn die Bruchgröſse B heiſst, ſo iſt $B .. 1 = 1 .. \frac{2}{3}$; alſo iſt (24) $B = (1 . 1) : \frac{2}{3}$. Oder man erhält den zu B und 1 gemeinſamen Maſsſtab, m, wenn man 1 durch den Nenner $\frac{2}{3}$ dividirt (1 als $\frac{2}{3}$ anſieht); und B, wenn man m mit dem Zähler multiplicirt. Alſo iſt auch $\frac{1}{\frac{2}{3}} = (1 : \frac{2}{3}) . 1$. Aber $1 : \frac{2}{3} = 1 . \frac{3}{2}$ (19. S. 148) $= \frac{3}{2}$. Alſo $\frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} . 1 = \frac{3}{2}$.

Oder es ſei $\frac{3}{\frac{5}{7}}$ gegeben, ſo iſt dieſer Bruch $= (1 : \frac{5}{7}) . 3$ $= (1 . \frac{7}{5}) . 3 = \frac{7}{5} . 3 = \frac{7 . 3}{5} = \frac{21}{5}$.

Im Allgemeinen alſo, wenn $\frac{a}{\frac{b}{c}}$ gegeben, ſo heiſst dieſs: die Bruchgröſse, die kommt, wenn man 1 als $\frac{b}{c}$ anſieht (durch $\frac{b}{c}$ dividirt) und den Quotient a-mal nimmt.

Alſo

Alſo iſt $\frac{a}{\frac{b}{c}} = \left(1 : \frac{b}{c}\right) . a = \left(1 . \frac{c}{b}\right) . a$ (19. S. 148)

$= \frac{c}{b} . a = \frac{ca}{b}.$

Man mache ſich dieſs durch Linearanſchauungen in beſtimmten Beiſpielen deutlich!

b) Was die *einfachen im Zähler gebrochnen Brüche* betrifft, der allgemeinen Form: $\frac{\frac{a}{b}}{c}$; ſo heiſst dieſer Ausdruck: die Bruchgröſse, welche entſteht, wenn man 1 als c anſieht, und von dieſem Quotienten das $\frac{a}{b}$-fache nimmt.

Alſo iſt $\frac{\frac{a}{b}}{c} = (1 : c) . \frac{a}{b}$. (Man conſtruire ſich hievon mehrere Beiſpiele in Linien.) Man nehme alſo erſt von 1 den c-ten Theil, und dieſen $\frac{1}{c}$ dann $\frac{a}{b}$-theilmal; das iſt vom $\frac{1}{c}$ den b-ten Theil a-mal; alſo $\left(\frac{1}{c} : b\right) . a$. Es iſt aber $\frac{1}{c} : b = \frac{1}{cb}$ (d. §. S. 328); alſo auch $\left(\frac{1}{b} : b\right) . a$ $= \frac{1}{cb} . a = \frac{a}{cb}$. Daher $\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{cb}$.

c) Iſt endlich ein *einfacher gebrochner Bruch*, der allg. Form $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ gegeben; ſo heiſst dieſer Ausdruck: die Bruchgröſse, welche kommt, wenn man 1 durch $\frac{c}{d}$ divi-

dirt, und den Quotienten, als das gem. Maſs für 1 und B, mit $\frac{a}{b}$ multiplicirt. Alſo iſt $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \left(1 : \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{a}{b}$

$= \left(1 \cdot \frac{d}{c}\right) \cdot \frac{a}{b}$ (19. S. 148) $= \frac{d}{c} \cdot \frac{a}{b} = \frac{d}{c} : b \cdot a$

$= \frac{d\,a}{c\,b}$ (d. §. S. 328). Alſo auch der gegebne Bruch $= \frac{d\,a}{c\,b}$.

Um zu zeigen, wie man ſich dieſe allgemeinen Beweiſe zu verſinnlichen hat, ſtehe folgendes Beiſpiel hier. In Fig. 71. ſei der Bruch $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}}$ von der abſ. Einheit A aus zu conſtruiren. Um das der Einheit und der Bruchgröſse, B, gem. Maſs, m, zu finden, muſs man 1 durch $\frac{5}{7}$ dividiren, d. i. als $\frac{5}{7}$ anſehen und das Einfache dazu ſuchen; man theile alſo A in 5 Theile, und nehme davon 7, ſo erhält man m $= \frac{7}{5}$ von 1, alſo (9, S. 54) ſchlechtweg $\frac{7}{5}$; nun muſs m $= \frac{7}{5}$ mit $\frac{2}{3}$ multiplicirt werden. Man nehme alſo von $\frac{7}{5}$ den dritten Theil; alſo von jedem $\frac{1}{5}$ den dritten Theil, $= \frac{1}{3 \cdot 5}$ $= \frac{1}{15}$, 7mal; man erhält demnach $\frac{7}{3 \cdot 5} = \frac{7}{15}$; und dieſs endlich nehme man 2mal, ſo erhält man B $= \frac{14}{15}$ $= \frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 5}$.

d) Wie ſoll man aber ſolche Brüche ausſprechen? z. B. $\frac{1}{\frac{1}{2}}$ in Vergleich mit $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$ heiſst ein Zweitheil; und es deutet „*theil*" an, daſs 1 durch 2 zu dividiren: dieſer Analogie nach iſt daher $\frac{1}{\frac{1}{2}}$ anszuſprechen: ein Zweitheiltheil;

theil; alſo auch $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}}$ ſo: *zweidrittheil fünfſiebentheil-theil.*

e) Wenn nun doppelt oder dreifach gebrochne Brüche vorkommen, ſo wird Der, welcher das Vorige verſtanden, auch hierin keine Schwierigkeiten finden; z. B. der Bruch

$$\frac{A)\ \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}}{B)\ \frac{\frac{e}{f}}{\frac{g}{h}}} = \frac{\alpha)\ \frac{a\,d}{b\,c}}{\beta)\ \frac{e\,h}{f\,g}} = \frac{z)\ a\,d\,f\,g}{n)\ b\,c\,e\,h}.$$

Denn $\frac{A}{B} = (1 : B) . A$; aber $B = \beta$ (als beſtimmte Vielheit überhaupt betrachtet), und $A = \alpha$; alſo iſt $\frac{A}{B} = \frac{\alpha}{\beta}$ aber $\frac{\alpha}{\beta}$ nach dem Vorigen $= \frac{z}{n}$; alſo auch $\frac{A}{B} = \frac{z}{n}$.

D.

Auf gleiche Weiſe ſind hier noch die *Kettenbrüche*, *Stufenbrüche*, *continuirlichen Brüche* zu betrachten (d. §.)

a) Um dieſe Lehre faſslich darzuſtellen, nehmen wir erſt einen einfachen Stufenbruch von 2 Stufen, der einfachſten Form, in einem beſtimmten Beiſpiele, vor Augen. Was heiſst alſo $\frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{1} \mathrm{I} \frac{1}{2}$? (Fig. 72.)

Der Bruchwerth von $\frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{1} \mathrm{I} \frac{1}{2}$ wird gefunden, wenn man die abſol. Einheit, A, als $1 + \frac{1}{2}$ anſieht

ſieht (durch $1 + \frac{1}{2}$ dividirt) und den Quotient 1mal nimmt. Alſo iſt B die durch $\frac{1}{1}\,\mathrm{I}\,\frac{1}{2}$ angedeutete Bruchgröſse) diejenige Gröſse, wovon die abſol. Einheit A das $(1 + \frac{1}{2})$-fache iſt. Um nun das $(1 + \frac{1}{2})$-fache zu würdigen, und damit rechnen zu können, muſs man 1 auch auf die Benennung des angehängten Bruchs bringen, da erhält man $\frac{2+1}{2} = \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}$; alſo iſt $\frac{1}{1}\,\mathrm{I}\,\frac{1}{2} = \frac{1}{\frac{3}{2}}$, welches, nach d. §. B, = iſt $\frac{2}{3}$.

Oder es ſei Fig. 73. gegeben $\frac{2}{3}\,\mathrm{I}\,\frac{2}{7}$; ſo findet man, m, (das gem. Maſs zu A und B), wenn man $1 : (3 + \frac{2}{7}) = 1 : (\frac{21}{7} + \frac{2}{7}) = 1 : \frac{21+2}{7} = 1 : \frac{23}{7} = \frac{7}{23}$. Alſo iſt $\frac{2}{3}\,\mathrm{I}\,\frac{2}{3} = \frac{2}{\frac{23}{7}}$, welches, nach d. §. B, $= \frac{2 \cdot 7}{23} = \frac{14}{23}$.

Und allgemein, wenn $\frac{\alpha}{a}\,\mathrm{I}\,\frac{\beta}{b}$ gegeben iſt, ſo iſt

$$m = 1 : \left(a + \frac{\beta}{b}\right) = 1 : \left(\frac{ab}{b} + \frac{\beta}{b}\right) = 1 : \frac{ab+\beta}{b}$$

alſo iſt auch $\frac{\alpha}{a}\,\mathrm{I}\,\frac{\beta}{b} = \frac{\alpha}{\frac{ab+\beta}{b}}; = \frac{\alpha b}{ab+\beta}$ (d. §. B). Hiernach kann man nun jeden einfachen Stufenbruch von 2 Stufen auflöſen.

Iſt ein Stufenbruch von 2 Stufen der Form $\frac{1}{a}\,\mathrm{I}\,\frac{1}{b}$ gegeben, ſo iſt dieſer $= \frac{1}{\frac{ab+1}{b}} = \frac{b}{ab+1}$; z. B. $\frac{1}{3}\,\mathrm{I}\,\frac{1}{5} = \frac{5}{(3 \cdot 5)+1} = \frac{5}{16}$.

b) Zu-

b) Zunächst nun will ich sogleich allgemein einen Stufenbruch von 3 Stufen betrachten, seinen Sinn erklären, und seine Reduction zeigen. Und um sogleich die Nenner und Zähler der auf einander folgenden Stufen in Rücksicht der Folge der Stufen, und ihres Zusammengehörens deutlich zu bezeichnen, diene dafür folgendes Schema: $\frac{\alpha}{a} \mathrm{I} \frac{\beta}{b} \mathrm{I} \frac{\gamma}{c}$.

Man construirt den dadurch angedeuteten Bruchwerth, B, wenn man die abs. Einheit als das $a + \frac{\beta}{b} \mathrm{I} \frac{\gamma}{c}$-fache ansieht, um m zu finden; man muss daher erst wissen, ein Wievielfaches überhaupt das $\frac{\beta}{b} \mathrm{I} \frac{\gamma}{c}$-fache ist; man muss also erst diese beiden letzten Stufen reduciren; diese sind nach a) $= \frac{\beta c}{bc + \gamma}$. Also erhält man m, wenn man 1 durch $a + \frac{\beta c}{bc + \gamma}$ dividirt. Um diess thun zu können, muss man erst a und $\frac{\beta c}{bc + \gamma}$ auf gemeinsame Benennung bringen, welches (d. §. S. 334) geschieht, wenn man a durch $(bc + \gamma)$ multiplicirt, und dazu den Nenner $bc + \gamma$ setzt; d. i. es ist $a + \frac{\beta c}{bc + \gamma} = \frac{abc + a\gamma}{bc + \gamma} + \frac{\beta c}{bc + \gamma} = \frac{abc + a\gamma + \beta c}{bc + \gamma}$. Also ist $B = \frac{\alpha}{\frac{abc + a\gamma + \beta c}{bc + \gamma}}$ welches, nach d. §. B, $=$ ist: $\frac{\alpha bc + \alpha\gamma}{abc + a\gamma + \beta c}$.

Ist ein dreistufiger Bruch der Form $\frac{1}{a} \mathrm{I} \frac{1}{b} \mathrm{I} \frac{1}{c}$ gegeben; so ist er demnach $= \frac{bc + 1}{abc + a + c}$; z. B. $\frac{1}{2} \mathrm{I} \frac{1}{3} \mathrm{I} \frac{1}{4} = \frac{12 + 1}{24 + 2 + 4} = \frac{13}{30}$.

c) Hier-

c) Hieraus wird folgendes Geſetz der Reduction eines jeden einfachen Stufenbruchs, von einer beliebigen Anzahl von Stufen (*von n Stufen*) deutlich ſein: Man fange von den beiden unterſten Stufen an, reducire ſie auf einen gemeinen Bruch, dieſen ſetze man für die beiden unterſten Stufen; dazu nehme man die dritte Stufe von unten, und bringe ſo die 3 unterſten Stufen auf einen gemeinen Bruch, und ſubſtituire dieſen für die 3 unterſten Stufen; und fahre ſo fort, bis man zur oberſten Stufe gelangt iſt, und ſo den ganzen Stufenbruch in einen gemeinen Bruch verwandelt hat.

d) Verfährt man nach dieſer Regel, und nimmt

$$\frac{\alpha}{a} \mathrm{I} \frac{\beta}{b} \mathrm{I} \frac{\gamma}{c} \mathrm{I} \frac{\delta}{d} \mathrm{I} \frac{\varepsilon}{e} \mathrm{I} \ldots\ldots$$

als allgemeinen Ausdruck jedes Stufenbruchs an, ſo erhält man für:

2 Stufen $= \frac{\alpha}{a} \mathrm{I} \frac{\beta}{b} = \frac{\alpha b}{ab + \beta}$

3 Stufen $= \frac{\alpha}{a} \mathrm{I} \frac{\beta}{b} \mathrm{I} \frac{\gamma}{c} = \frac{\alpha bc + \alpha\gamma}{abc + a\gamma + \beta c}$

4 Stufen $= \frac{\alpha bcd + \alpha b\delta + \alpha\gamma d}{abcd + ab\delta + a\gamma d + \beta cd + \beta\delta}$

u. ſ. f. ins Unendliche.

e) Wenn man den Ausdruck für n Stufen mit dem für m — 1 Stufen von vorn an vergleicht, ſo zeigt ſich folgendes *Geſetz aus dem allg. Ausdrucke für n — 1 Stufen den allgem. Ausdruck für n Stufen zu finden:*

($\frac{Z}{N}$ heiſse der allgem. Ausdruck für n — 1 Stufen;

$\frac{Q}{R}$, der allgem. Ausdruck für n Stufen).

Man ſubſtituire überall im allgemeinen Ausdrucke für n — 1 Stufen, die nächſtfolgenden Buchſtaben des Alphabets,

bets, multiplicire dann den Nenner durch a (den Nenner der erſten Stufe) und addire dazu noch den Zähler, ſo erhält man den Nenner des allgem. Ausdrucks der folgenden Stufe; man multiplicire ferner den Nenner des allg. Ausdrucks für n — 1 Stufen mit α (den Zähler der erſten Stufe), ſo erhält man den Zähler des allgemeinen Ausdrucks für n Stufen.

Alſo wenn $\frac{Z}{N}$ der allg. A. für n — 1 Stufen nach der Subſtitution der folgeuden Buchſtaben in ihn iſt; ſo iſt $\frac{Q}{R} = \frac{\alpha N}{a N + Z}$.

So findet man alſo aus dem Werthe einer Stufe $\frac{\alpha}{a}$ den für 2, wenn man anſtatt $\frac{\alpha}{a}$ $\frac{\beta}{b}$ ſetzt, und $\frac{\alpha b}{a b + \beta}$ nimmt.

Aus $\frac{\alpha b}{a b + \beta}$ findet man den Werth für 3 Stufen, wenn man erſtlich die folgenden Buchſtaben ſubſtituirt, alſo $\frac{\beta c}{b c + \gamma}$ nimmt; und $(b c + \gamma) . \alpha$ für den neuen Zähler, aber $(b c + \gamma) . a + \beta c$ für den neuen Nenner ſetzt; da erhält man $\frac{\alpha b c + \alpha \gamma}{a b c + a \gamma + \beta c}$

u. ſ. f. ins Unendliche.

Denn daſs dieſs Geſetz ins Unendliche gehe, iſt aus dem Verfahren ſelbſt, gemäſs c), klar genug.

Will man aber ohne Subſtitution aus den allgemeinen Ausdrücken für n — 2 und n — 1 Stufen; das iſt, will man aus den beiden nächſtvorigen Ausdrücken, den nächſtfolgenden, für n Stufen finden: ſo zeigt ſich, wenn man fol-

gende beide Schematismen betrachtet, auch ein allgemeines Gesetz.

Horizontales Schema.

$$\frac{1}{0},\quad \frac{0}{1},\quad \overset{\alpha}{\underset{a}{\frac{\alpha}{a}}},\quad \overset{\beta}{\underset{b}{\frac{\alpha b}{ab+\beta}}},\quad \overset{\gamma}{\underset{c}{\frac{\alpha bc+\alpha\gamma}{abc+\beta c+a\gamma}}},\ \ldots$$

Verticales Schema.

		Nenner.	Zähler.	
	0	0	1	1
	1	1	0	0
I	a	a	α	α
II	b	$ab+\beta$	αb	β
III	c	$abc+\beta c+a\gamma$	$\alpha bc+\alpha\gamma$	γ

Wenn man hierbei die beiden Ausdrückungen $\frac{1}{0}$ und $\frac{0}{1}$ zu Hülfe nimmt, so wird das nächstfolgende Glied aus dem nächstvorigen nach folgendem allgemeinen Gesetze gebildet: *Man findet den Nenner des folgenden Ausdrucks*, wenn man den Nenner des vorigen mit dem Nenner der hinzugenommenen Stufe multiplicirt, und dazu setzt den Nenner des vorvorigen Ausdrucks multiplicirt mit dem Zähler der neuhinzugenommenen Stufe; und *den Zähler des folgenden Ausdrucks findet man*, wenn man den Zähler des vorigen Ausdrucks mit dem Nenner der neuhinzugenommenen Stufe multiplicirt, und dazu setzt den Zähler des vorvorigen Ausdrucks multiplicirt mit dem Zähler der neuhinzugenommenen Stufe.

Dieses Gesetz ergiebt sich aus der Anschauung des Verfahrens dieser Reduction selbst; so auch aus der beständigen Gleichheit desselben, man nehme so viele Stufen man wolle: daſs dieſs Gesetz ins Unendliche laufe.

So

So wollen wir z. B. nach dieſem Geſetze $\frac{1}{2}$ ‡ $\frac{2}{3}$ ‡ $\frac{3}{5}$ ‡ $\frac{2}{7}$ reduciren. So ſteht die Rechnung ſo:

	Nenner	=	=	Zähler	
	0			1	
	1			0	
2	2 . 1 + 1 . 0	2	1	2 . 0 + 1 . 1	1
3	3 . 2 + 2 . 1	8	3	3 . 1 + 2 . 0	2
5	5 . 8 + 3 . 2	46	18	5 . 3 + 3 . 1	3
7	7 . 46 + 2 . 8	338	132	7 . 18 + 2 . 3	2

Alſo iſt der genannte Stufenbruch $= \frac{132}{338}$.

f) Beſonders häufig kommen Stufenbrüche der Form

$\frac{1}{a}$ ‡ $\frac{1}{b}$ ‡ $\frac{1}{c}$ ‡ $\frac{1}{d}$ ‡

Es kommt daher vorzüglich darauf an, ſich für dieſe Form das Geſetz und den Schematismus der Bildung des Ausdruckes für n Stufen aus dem Ausdrucke für n — 1 und für n — 2 Stufen geläufig zu machen. Weil dabei alle Zähler aller Stufen 1 ſind, 1 aber in Multiplication nichts ändert, ſo iſt das Geſetz für dieſe Form der Stufenbrüche (nach e,) folgendes:

Man findet den Nenner des folgenden Ausdrucks, wenn man den Nenner des vorigen mit dem Nenner der neu hinzugenommenen Stufe multiplicirt, und dazu den Nenner des vorvorigen Ausdruckes addirt. *Und gleichergeſtalt den Zähler*, wenn man den Zähler des vorigen Ausdrucks mit dem Nenner der neu hinzugenommenen Stufe multiplicirt, und dazu den Zähler des vorvorigen Ausdruckes addirt.

Ich ſetze neben das allgemeine Schema hiervon, die Darſtellung des beſtimmten Beiſpieles $\frac{1}{2}$ ‡ $\frac{1}{3}$ ‡ $\frac{1}{2}$ ‡ $\frac{1}{3}$.

Allgem. Schema. *Beispiel.*

	Nenner	Zähler		N.	Z.
	0	1		0	1
	1	0		1	0
a	$a.1+0=a$	$1=a.0+1$	2	2	1
b	$ab+1$	$b=1.b+0$	3	7	3
c	$abc+c+a$	$bc+1$	2	15	7
d	$abcd+cd+ad+ab+1$	$bcd+d+b$	3	52	17

g) Von welcher Wichtigkeit die Lehre von den Stufenbrüchen für die gesammte Mathematik und die Anwendung derselben sei, wird zum Theil im nächsten §, zum Theil bei der Abhandlung bestimmter Gegenstände selbst erhellen. Da es aber die Kürze dieses Grundrisses, und die systematische Ordnung der Betrachtung, nicht gestattet, diese Theorie *hier* weiter auszuführen, so gebe ich nur noch einige Aufgaben an, die in dem folgenden Theile gelöst werden sollen.

α. Den Werth eines Stufenbruchs der Form

$$n+\cfrac{\alpha}{a+\cfrac{\beta}{b+\dots}} = n+\frac{\alpha}{a}\,\mathrm{I}\,\frac{\beta}{b}\,\mathrm{I}\dots$$

zu finden? (wo n jede ganze Zahl bedeutet.)

β. Ohne Zweifel hat z.B. $\cfrac{2}{3-\frac{1}{2}}$ Sinn; denn man findet den dadurch bezeichneten Bruchwerth, wenn man die absolute Einheit mit $3-\frac{1}{2}$ dividirt und den Quotient 2mal nimmt; also ist

$$\cfrac{2}{3-\cfrac{1}{2}} = \cfrac{2}{\cfrac{6-1}{2}} = \cfrac{2}{\cfrac{5}{2}} = \frac{4}{5}.$$

Allgemein $$\cfrac{\alpha}{a-\cfrac{\beta}{b}} = \cfrac{\alpha}{\cfrac{ab-\beta}{b}} = \frac{\alpha b}{ab-\beta}.$$

Ich

Ich will $\frac{\alpha}{a - \frac{\beta}{b}}$ durch $\frac{\alpha}{a} \diagup \frac{\beta}{b}$ bezeichnen.

Daraus wird deutlich ſein, daſs auch der Bruch

$$\frac{\alpha}{a} \diagup \frac{\beta}{b} \diagup \frac{\gamma}{c} \diagup \ldots\ \text{Sinn habe; auch:}$$

$$n \mp \frac{\alpha}{a} \diagup \frac{\beta}{b} \diagup \frac{\gamma}{c} \diagup \ldots$$

Es iſt das allgemeine Geſetz der Reduction dieſer Brüche, wo — blos auf den Zähler geht, auf gewöhnliche Brüche zu finden?

γ. Es können alſo auch die Stufen überhaupt durch $+$ oder $-$ im Nenner oder Zähler, verbunden ſein. Daher der allgemeinſte Ausdruck jedes Stufenbruchs iſt

$$\cfrac{\alpha}{a \mp \cfrac{\beta}{b \mp \cfrac{\gamma}{c \mp \ldots}}} \qquad \text{oder: } \frac{\alpha}{a} \not\mp \frac{\beta}{b} \not\mp \frac{\gamma}{c} \not\mp \ldots\ldots$$

Man fragt nach einem allgemeinen Geſetze der Entwickelung für dieſen Ausdruck?

δ. Einen gemeinen Bruch kann man ohne weiteres umkehren; wie aber kann man einen jeden Stufenbruch umkehren, ſo daſs er Stufenbruch bleibt?

ε. Ein jeder gemeiner Bruch läſst ſich durch unendlich viele gemeine Brüche ausdrücken (d. §.); läſst ſich auch jeder Stufenbruch auf unendlich vielerlei Weiſe durch Stufenbrüche ausdrücken? und wenn dieſs iſt, welches iſt ſein bequemſter und kürzeſter Ausdruck, und wie findet man letzteren?

(So iſt z. B. $\frac{4}{2} \not\mp \frac{4}{2} \not\mp \ldots\ldots = \frac{4}{2} \not\mp \frac{2}{1} \not\mp \ldots\ldots$
$= \frac{2}{1} \not\mp \frac{2}{2} \not\mp \ldots\ldots = \frac{2}{2} \not\mp \frac{1}{1} \not\mp \ldots\ldots$

So auch: $\frac{2}{2} \not\mp \frac{2}{2} \not\mp \ldots\ldots = \frac{1}{1} \not\mp \frac{1}{2} \not\mp \ldots\ldots = \frac{2}{2} \not\mp \frac{1}{1} \not\mp \ldots$)

Im-

Immer ſind die Ausdrücke, wo im Zähler lauter 1 ſtehen, bequemer, als die andern.

ζ. Da auch die Stufenbrüche $> <$ 1 ſein können, ſo fragt ſich, wie dieſe zu erkennen, und wie man n (eine ganze Zahl) + *einem Stufenbr.* $<$ 1 in einen Stufenbr. $>$ 1 verwandeln könne; und wie man umgekehrt einen Stufenbr. $>$ 1 auf n + *einen Stufenbruch* $<$ 1 bringe?

η. Auch folgende Stufenbrüche ſind aufzulöſen:

$$\frac{n}{\cfrac{\alpha}{a \mp \cfrac{\beta}{b \mp \dots}}} = \frac{n}{\frac{\alpha}{a}} \mp \frac{\beta}{b} \mp \frac{\gamma}{c} \mp \dots$$

ϑ. Auch doppelte Stufenbrüche der Form:

$$\frac{\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{A}} \mp \frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{B}} \mp \dots}{\frac{\alpha}{a} \mp \frac{\beta}{b} \mp \dots}$$

ſind aufzulöſen?

ι. Die durch a, b, c ... α, β, γ ... angedeuteten Vielheiten können wieder Brüche, ja ſelbſt Stufenbrüche ſein.

h) Zum Schluſs bemerke ich, daſs die Buchſtaben a, b, c, ... α, β, γ, überhaupt Vielheiten, endliche und unendliche bedeuten; und die Geſetze der Entwickelung der Stufenbrüche hier für beide Fälle bewieſen ſind.

E.

Alle gemeine Brüche können entweder ganz genau oder in endloſer Näherung als Syſtemsbrüche, z. B. als decadiſche ausgedrückt werden (S. 292).

Alle

Alle ungewöhnlich geſtaltete Brüche können in gemeine Brüche verwandelt werden (dieſes § C und D).

Alſo können überhaupt *alle* Brüche, entweder ganz genau oder durch unendliche Näherung als Syſtemsbrüche, z. B. als Decimalbrüche, ausgedrückt werden.

Dieſs iſt (17, b) ſelbſt der Fall, wenn die in Syſtemsbrüche zu verwandelnde Brüche idealiſche ſind.

Umgekehrt daher entſteht hiermit die Aufgabe: jeden Syſtemsbruch, z. B. jeden decadiſchen Bruch, in einen gemeinen (auch in ungewöhnlicheren Formen) zu verwandeln, welchem derſelbe entweder ganz genau, oder in unendlicher Annäherung gleich iſt. Dieſe Aufgabe ſoll im nächſten § aufgelöſt werden.

39.

Um das, was von der Natur der Brüche zu erkennen hier noch übrig iſt, gründlich darzuſtellen, ſind erſt folgende Lehrſätze unter A und B, ganz allgemein zu beweiſen.

A.

a) Die Diviſion iſt in 19 ſo definirt worden: a wird durch v dividirt, wenn man a als die Vielheit v anſieht, und dazu die Einheit, q (den Quotient) ſucht, ſo daſs v . . A = a . . q, oder eigentlich v A . . A = a . . q; kürzer v (überhaupt) . . 1 (überhaupt) = a . . q. Der Dividend kann hierbei entweder eine beſtimmte Vielheit, einer beſtimmten abſoluten Einheit ſein (wie in Fig. 73. wo a = 6 A, alſo a : 2 = 3 A = q), dann iſt auch q eine beſtimmte Vielheit derſelben abſoluten Einheit A, weil nur Vielheiten derſelben Einheit gegen einander ein beſtimmtes Verhältniſs haben (9). In dieſem Falle alſo iſt v A . . A = a A . . q A. Man kann aber auch a als *Vielheit überhaupt*,

haupt, also als a A ansehen, dann fragt man z. B. in 6:3 wie heisst die *Vielheit überhaupt*, wovon das *Sechsfache überhaupt* das Dreifache ist? daher also ist v A . . A = a A . . q A; das ist v . . 1 = a . . q. Und es ist hierbei eine bestimmte absolute Einheit A (S. 54) von der unbestimmt-absoluten, oder *allgemeinen* Einheit A (S. 145) zu unterscheiden.

Aber eben so ursprünglich ist auch folgende Definition der Division: a durch v dividiren heisst, untersuchen: welche Vielheit a dann ist, wenn man v als die Einheit (das Mass) zu a ansieht; *oder:* was ist a für eine Vielheit der Einheit a? Da man hier a durch v als Einheit messen soll, so muss v oder der Divisor eine Grösse derselben Art, und wenn sie als Vielheit ausgedrückt ist, sogar nach derselben absoluten Einheit A ausgedrückt sein, nach welcher auch a ausgedrückt ist. Wenn z. B. 6:2 gesucht wird; so muss a und v als Grösse derselben Art, nach derselben absoluten Einheit ausgedrückt sein; man lege also v an a, so ist 3 v = a, also der Quotient 3, das ist: wie sich überhaupt 3 zu 1 verhält, so verhält sich 6 . . 2; also in diesem Beispiele ist:

6 A . . 2 A = 3 A . . 1 A; also auch (S. 201, c)
2 A . . 6 A = 1 A . . 3 A. Also bei dieser Ansicht überhaupt:

v A . . a A = 1 A . . q A.

Auch bei dieser Ansicht kann Dividend und Divisor allgemein gedacht werden; man kann z. B. in 6:2 so fragen: welche Vielheit ist das *Sechsfache überhaupt*, vom *Zweifachen überhaupt;* dann ist

2 A . . 6 A = A . . 3 A; das ist:
2 . . 6 = 3 . . 1 ; also allgemein:
v A . . a A = A . . q A, das ist:
v . . a = 1 . . q.

Wenn

Wenn nun $v \,..\, a = 1 \,..\, q$, ſo iſt auch (201, b) $v \,..\, 1 = a \,..\, q$.

Wenn alſo in beiden Anſichten der Diviſion von lauter *Vielheiten überhaupt* die Rede iſt, ſo iſt in beiden $v \,..\, 1 = a \,..\, q$.

Beide Anſichten kommen in der Wiſſenſchaft ſelbſt und im gemeinen Leben vor; wenn z. B. 12 Rthlr. unter 3 Perſonen vertheilt werden ſollen, ſo muſs man 12 Rthlr. als das *Dreifache überhaupt* anſehen, und dazu die Menge Rthlr. finden, welche 3 mal genommen 12 Rthlr. geben. Es iſt alſo: 3 Perſonen .. 1 Perſon = 12 Rthlr. .. 4 Rthlr.

oder überhaupt

$$3 \,..\, 1 = 12\,\text{Rthlr.} \,..\, 4\,\text{Rthlr.}$$

Wenn man aber fragt, wie vielmal 3 Rthlr. in 12 Rthlr. liegen, oder welche Vielheit 12 Rthlr. von 3 Rthlr. ſind, ſo muſs man 12 Rthlr. durch 3 Rthlr. ausmeſſen, ſo erhält man 4; alſo iſt 3 Rthlr. .. 12 Rthlr. = 1 .. 4.

So wie ſich aber das 3-fache einer beſtimmten Einheit zum 12-fachen derſelben Einheit verhält, ſo verhält ſich auch das Dreifache überhaupt zum Zwölffachen überhaupt; alſo kann man auch die Rechnung in Zahlen überhaupt machen, ohne daſs der Quotient verändert wird.

Daſs aber beide Anſichten gleich urſprünglich ſind, erhellet aus Folgendem. Jede Gröſse, oder ſelbſt jede Vielheit jeder beliebigen Einheit, kann entweder ſo behandelt werden, daſs man von ihr aus, als Einheit, eine beſtimmte Vielheit zu Stande bringt (in der Multiplication), oder, daſs man ſie als eine beſtimmte Vielheit anſieht (in der Diviſion). Sieht man aber eine belie[bige Grö]ſse als

eine beliebige Vielheit an (d. i. nimmt man an, dass eine beliebige Grösse eine *beliebige* Vielheit *sei*), so muss entweder angegeben werden, welche Vielheit sie *sein* soll, dann sucht man dazu die Einheit von der Art der zu dividirenden Grösse (*erste Ansicht der Division*, §. 19.), oder es muss die Einheit von der Art der zu dividirenden Grösse gegeben sein, und man sucht die Vielheit, welche erstere von letzterer *ist* (*andere Ansicht der Division*). Auser diesen beiden ist keine dritte möglich, wie so eben weiter bewiesen werden soll.

Durch die Einheit und die davon zu construirende Vielheit ist die Grösse der construirten Vielheit bestimmt; das ist z. B. in Fig. 75, wenn A = 3 gegeben, so ist auch 3 A = 12 A gegeben. Oder durch die Grösse der beiden Factoren ist das Product bestimmt. Es heisse das Product B, die gegebne Einheit A, die gegebne Vielheit V; so ist also B durch A und V bestimmt, also auch umgekehrt durch B und A V, und durch B und V A; wenn man nun aus B und V A oder aus B und A V bestimmt (aus dem Producte und einem Factor, den andern findet), so dividirt man, entweder nach der ersten oder andern Ansicht; woraus also erhellet, dass auser diesen beiden Ansichten keine dritte möglich.

b) Wenn in beiden Ansichten, absolut betrachtet, einerlei Dividend und Divisor ist, so erhält man einerlei Quotient, absolut betrachtet. Denn es sei a zu dividiren durch v, so ist nach der ersten Ansicht

I. v . . A = a . . q

nach der andern aber zunächst

II. v . . a = A . . Q

(wo Q den Quotienten im andern Falle bedeutet).

Ist

Iſt aber

v .. a = A .. Q, ſo iſt auch (S. 201, b):

v .. A = a .. Q; aber auch I,

v .. A = a .. q; daher auch q = Q, weil durch 3 Glieder einer Proportion das vierte individuell beſtimmt iſt (24).

c) In beiden Fällen der Diviſion ſteht der Quotient mit dem Dividendus in directem, mit dem Diviſor aber in indirectem Wachsthum.

Für den erſten Fall iſt dieſs 19, S. 147. bewieſen. In dem andern Falle aber iſt daſſelbe Maſs (derſelbe Diviſor) in einer gröſseren Gröſse (Dividend) um ſo viel mehrmal enthalten, als dieſe Gröſse gröſser iſt als eine andere (S. 99); umgekehrt in derſelben zu meſſenden Gröſse (demſelben Dividende) ein gröſseres Maſs (Diviſor) um ſo viel Male weniger enthalten, als ein kleineres Maſs (ein kleinerer Diviſor) kleiner iſt. Alſo je gröſser der Dividend, je gröſser der Quotient, aber je gröſser der Diviſor, je kleiner der Quotient.

(Man mache ſich dieſs durch beſtimmte Beiſpiele deutlich).

Ein anderer Beweiſs iſt folgender:

In beiden Fällen von a : v iſt

v .. A = a .. q; kürzer

v .. 1 = a .. q

wächſt alſo v, ſo nimmt, wenn das Uebrige bleibt, q in demſelben Maſse ab (§. 26, S. 210 unter ζζ). wächſt aber a, ſo wächſt auch q (§. 26. B, a).

d) In beiden Fällen iſt a : v $\gtrless$ v : a, und zwar wenn a : v = q, ſo iſt v : a = $\frac{1}{q}$ (der umgekehrte Quotient von a : v = q).

 (Für

(Für den ersten Fall ist dieſs §. 28, S. 227. bewiesen).
Im zweiten wie im ersten Falle ist

v .. 1 = a .. q; daher auch
v .. a = 1 .. q.

Soll nun v : a = a : v sein, so ist auch
a .. v = 1 .. q; welches, da auch
v .. a = 1 .. q ist, unmöglich ist; vielmehr da v .. a das umgekehrte Verh. a .. v ist, so muſs, wenn Proportionalität bleiben soll (26, 1) auch 1 .. q umgekehrt werden. Es ist daher in v : a
v .. a = q .. 1; welches (22) gleich
v .. a = 1 .. $\frac{1}{q}$; wenn also im ersten Falle der Quotient = q ist, so ist er im zweiten $\frac{1}{q}$ oder (16) der umgekehrte q.

e) Wenn man den Dividend sowohl als den Divisor selbst als einerlei Vielheit ansieht und dazu die Einheit sucht (d. i. selbst durch einerlei Gröſse dividirt): so bleibt der Quotient unverändert.

Das ist a : v = (a : u) : (v : u) = q
Denn in beiden Fällen der Division ist
v .. 1 = a .. q; nimmt man nun (v : u) .. 1 = (a : u) .. q, so muſs (26, S. 206, δδ) auch dieſs eine Proportion sein; also weil 1 im Vordersatze unverändert bleibt, auch q unverändert bleiben.

Auf eine andere allgemeine Art:
In beiden Fällen nimmt q zu wie a zunimmt, und ab, wie v zunimmt; wird also a und v durch dieselbe Vielheit dividirt, so nehmen beide a und v auf gleiche Art entweder zu oder ab. Nehmen sie auf gleiche Art zu, so wird q vermöge der Zunahme von a gerade so vielmal gröſser, als es vermöge der Zunahme von v kleiner wird; nehmen beide, a und v ab, so wird

wird q durch die Verkleinerung von a gerade ſo kleiner, als es durch die Abnahme von v gröſser wird. Bleibt alſo immer gleich.

Sind daher a und v ganze Zahlen, ſo bleibt der Quotient gleich, wenn man beide durch Diviſion auf kleinere Zahlen bringt; z. B. $24 : 8 = 3$; auch $(24 : 2) : (8 : 2) = 12 : 4 = 3$; auch $6 : 2 = 3$. Man würde ſich alſo die Diviſion ganzer Zahlen ſehr erleichtern, wenn man eine Tafel hätte, in welcher die einfachen ganzzahligen Factoren aller ganzen Zahlen berechnet ſtehen, dergleichen eine Factorentafel genannt wird.

f) Jeder Quotient iſt einem Bruche gleich, deſſen Zähler des Quotienten Dividend, und deſſen Nenner des Quotienten Diviſor iſt; das iſt, allgemein:

$$a : v = \frac{a}{v}; \text{ oder } n : m = \frac{n}{m}, \text{ auch:}$$

$$\frac{n}{m} : \frac{o}{p} = \frac{\frac{n}{m}}{\frac{o}{p}}$$

(wobei der Dividend und Diviſor endliche oder idealiſche Vielheiten, und im erſten Falle ganze oder gebrochne Zahlen ſein können. Vorzüglich aber kommt es darauf an, alle dieſe Sätze unter a, b, c, d, e, f *ganz allgemein* zu beweiſen. In den allermeiſten Lehrbüchern werden ſie hinterher als allgemein bewieſen vorausgeſetzt, wenn es gleich nicht geſchehen war. Ich verſtehe alſo unter *Vielheit* den Gattungsbegriff, unter *Zahl* aber den Artbegriff, ſo daſs jede Zahl eine Vielheit, nicht aber jede Vielheit eine Zahl iſt; ſo ſind zwar Glieder eines idealiſchen Verhältniſſes Vielheiten, nicht aber Zahlen von einander).

Denn

Denn in beiden Fällen der Division ist

$v \,..\, 1 = a \,..\, q.$ Auch ist nach den Gesetzen der Proportion:

$v \,..\, 1 = 1 \,..\, \frac{1}{v}$; daher auch

$a \,..\, q = 1 \,..\, \frac{1}{v}$; folglich

$a \,..\, q = 1 . a \,..\, \frac{1}{v} . a$; gleich

$a \,..\, q = a \,..\, \frac{a}{v}$; folglich auch, weil nur Gleiches zu Gleichem einerlei Verhältniss hat,

$q = \frac{a}{v} = a : v.$

Von hier aus lässt sich auch *mittelbar* der unter e schon bewiesene Satz beweisen. Denn da $a : v = \frac{a}{v}$, aber (S. 330) $\frac{a}{v} = \frac{a : u}{v : u}$, so ist auch $a : v = \frac{a : u}{v : u}$; aber auch $(a : u) : (v : u) = \frac{a : u}{v : u}$; also auch $a : v = (a : u) : (v : u)$.

B.

a) Aus der in diesem §. aufgestellten anderen Erklärung der Division ergiebt sich, dass das in 17 b für die Aufsuchung jedes Verhältnisses aufgestellte allgemeine Verfahren in einer beständig verkettet-fortgesetzten Division besteht. Man erinnere den Inhalt dieses §. 17 b und nehme sodann das S. 96 aufgestellte allgemeine Schema des Verfahrens bei Aufsuchung eines jeden Verhältnisses der $<$ Ungl. zur Hand. Diess Schema ist, wenn man für a und

und b $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, und für das unbestimmte n nach einander a, b, c, d setzt, folgendes:

$$\mathfrak{b} = \overline{a\mathfrak{a}} + \alpha$$
$$\mathfrak{a} = \overline{b\alpha} + \beta$$
$$\alpha = \overline{c\beta} + \gamma$$
$$\beta = \overline{d\gamma} + \delta$$
$$\gamma = \overline{e\delta} + \varepsilon$$

u. s. w.

Wenn also das Vorderglied des aufzusuchenden Verh. der < Ungl. $\mathfrak{a}$, das Hinterglied aber $\mathfrak{b}$ ist, so dividirt man nun zuerst mit $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{b}$, der Quotient muss wenigstens 1, kann aber auch jede andere ganze Zahl, a, sein, und ausserdem bleibt der erste Rest, α; dann dividirt man mit α in $\mathfrak{a}$, und erhält den Quotient b und den Rest β; und so fort, bis bei endlichen Verhältnissen einmal ein Rest den nächstvorigen vollkommen theilet, oder, bei unendlichen Verhältnissen, bis ein neuer Rest so unbeträchtlich ist, dass man ihn in bestimmter Beziehung ganz aus der Acht lassen kann.

Das Verfahren dieser Division kann allgemein so dargestellt werden:

$\mathfrak{a}$) $\mathfrak{b}$ (a
α) $\mathfrak{a}$ (b
β) α (c
γ) β (d
u. s. f.

Das Resultat aber derselben, alle auf einander folgende Divisoren = 1 gesetzt, also:

$$\cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d}}}}$$

u. s. f.

oder horizontal:

$$\frac{1}{a}\ I\ \frac{1}{b}\ I\ \frac{1}{c}\ I\ \frac{1}{d}\ I \ldots$$

Diesen

Dieſen Ausdruck des Reſultats erhält man auch als einen Stufenbruch, wenn man den Bruch $\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}$ ſo entwikkelt, daſs man erſt Nenner und Zähler durch $\mathfrak{a}$ dividirt, ſo iſt $\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}} = \frac{1}{a + \frac{\alpha}{\mathfrak{a}}} = \frac{1}{a} \,\mathrm{I}\, \frac{\alpha}{\mathfrak{a}}$; hernach weiter den angeketteten Bruch $\frac{\alpha}{\mathfrak{a}}$ beiderſeits durch α dividirt, ſo iſt $\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}} = \frac{1}{a} \,\mathrm{I}\, \frac{1}{b} \,\mathrm{I}\, \frac{\beta}{\alpha}$; und ſo fort fährt, bis einmal ein Zähler im Nenner aufgeht.

Theilt nun bei der Aufſuchung des Verhältniſſes der $<$ Ungleichheit $\mathfrak{a}..\mathfrak{b}$ endlich einmal ein Reſt den nächſtvorigen, oder wird bei unendlichen Verhältniſſen (oder bei endlichen auch, wenn man nur Näherungen will) als Ihn theilend angenommen, ſo theilt er auch, als der gröſste gemeinſame Maſsſtab für $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, alle vorige Reſte, auch beide $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, wie dieſs §. 17 b S. 105 bewieſen worden. Theilt aber ſo ein Reſt, z. B. μ, alle vorige, auch $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, ſo ſind alle vorige Reſte, auch $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, ganze Zahlen von μ, als ihrer gemeinſamen Einheit.

Geſetzt alſo, es meſſe δ den vorigen Reſt γ, ſo daſs $\delta.e = \delta e = \gamma$ iſt; ſo iſt $\delta..\gamma = 1..e$.

Nimmt man aber in dem entſprechenden Stufenbruche $\frac{1}{a} \,\mathrm{I}\, \frac{1}{b} \,\mathrm{I}\, \frac{1}{c} \,\mathrm{I}\, \frac{1}{d} \,\mathrm{I}\, \frac{1}{e}$ die letzte Stufe $\frac{1}{e}$, ſo ſtellt dieſe in Zähler und Nenner das Verhältniſs $\delta..\gamma = 1..e$ allgemein dar.

Nun iſt $\beta = d\gamma + \delta$, alſo nach δ als Einheit ausgedrückt, $\beta = de + 1$; daher $\gamma..\beta = e..de + 1$.

Reducirt

Reducirt man vom genannten Stufenbruche die beiden letzten Stufen $\frac{1}{d} \mathbin{I} \frac{1}{e}$, so erhält man $\frac{e}{de+1}$; so dass dieser Bruch auch in seinem Zähler und Nenner das Verhältniss $\gamma \,..\, \beta$ darstellt.

Da nun $\beta = de + 1$, aber $\alpha = c\beta + \gamma$ ist, so ist nach δ als Einheit ausgedrückt, $\alpha = c\,(de + 1) + e = cde + c + e$; daher $\beta \,..\, \alpha = de + 1 \,..\, cde + c + e$.

Entwickelt man vom Stufenbruche die 3 letzten Stufen $\frac{1}{c} \mathbin{I} \frac{1}{d} \mathbin{I} \frac{1}{e}$, so erhält man aus $\frac{1}{c} \mathbin{I} \frac{e}{de+1}$ den Werth $\frac{de+1}{cde+c+e}$, der ebenfalls das Verh. $\beta \,..\, \alpha$ ausdrückt.

Nun ist ferner $\mathfrak{a} = b\alpha + \beta$; $b\alpha = b\,(cde + c + e) = bcde + bc + be$; aber $\beta = de + 1$; daher ist $\mathfrak{a} = bcde + bc + be + de + 1$; also $\alpha \,..\, \mathfrak{a} = cde + c + e \,..\, bcde + bc + be + de + 1$.

Entwickelt man im Stufenbruche die 4 letzten Stufen $\frac{1}{b} \mathbin{I} \frac{1}{c} \mathbin{I} \frac{1}{d} \mathbin{I} \frac{1}{e}$, so erhält man im Zähler und Nenner dieselben Grössen, als für $\alpha \,..\, \mathfrak{a}$.

Endlich ist $\mathfrak{b} = a\mathfrak{a} + \alpha$; $a\mathfrak{a} = a\,(bcde + bc + be + de + 1) = abcde + abc + abe + ade + a$; α aber $= cde + c + e$; daher $\mathfrak{b} = abcde + abc + abe + ade + a + cde + c + e$, also $\mathfrak{a} \,..\, \mathfrak{b}$ nach δ ausgedrückt $= bcde + bc + be + de + 1 \,..\, abcde + abc + abe + ade + a + cde + c + e$.

Reducirt man auch vom Stufenbruche alle 5 Stufen, so erhält man im Zähler die Zahl für $\mathfrak{a}$, im Nenner die Zahl für $\mathfrak{b}$.

Aus der gleichen Construction eines Stufenbruchs aus seinem ihm gleichen gemeinen Bruche, mit der Construction des Verhältnisses $\mathfrak{a} \,..\, \mathfrak{b}$ leuchtet ein, daſs die Entwickelung der entsprechenden Stufen des Stufenbruchs immer die Verhältniſszahlen der entsprechenden Glieder in $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}$, α, β, γ geben müſse.

Oben aber §. 17 b ist bewiesen worden, daſs, wenn man nur eine Stufe also $\frac{1}{a}$ nimmt, das ist α schon für Nichts setzt, man ein Verhältniſs erhalte, welches gegen das wahre Verh. $\mathfrak{a} \,..\, \mathfrak{b}$ zu $>$; bei 2 Stufen $\frac{1}{a} \,\mathrm{I}\, \frac{1}{b}$, wo $\beta = 0$ gesetzt wird eins, welches gegen $\mathfrak{a} \,..\, \mathfrak{b}$ zu $<$; bei 3en eins, welches dagegen zu $>$, aber weniger zu groſs, als bei einer; bei 4en eins, welches dagegen zu $<$, aber weniger zu $<$, als bei 2en, ... u. s. f. ins U.; so daſs man sich, das wahre Verhältniſs $\mathfrak{a} \,..\, \mathfrak{b}$ zwischen gröſsere und kleinere Verhältnisse immer enger einschränkend, diesem Verhältnisse immer mehr nähere, und dieſs zwar so, daſs es auser den gefundnen Näherungsverhältnissen keine Verhältnisse in kleineren Zahlen gebe, welche $\mathfrak{a} \,..\, \mathfrak{b}$ eben so nahe, geschweige näher kämen. Es ist also im angeführten Beispiele für $\mathfrak{a} \,..\, \mathfrak{b}$ das Verhältniſs *aus der ersten Stufe* $1 \,..\, a$ oder $\frac{1}{a}$ zu $>$;

aus den 2 ersten Stufen $\frac{1}{a} \,\mathrm{I}\, \frac{1}{b}$

$b \,..\, ab + 1$ oder $\frac{b}{ab+1}$ zu $<$;

aus den 3 ersten Stufen

$bc + 1 \,..\, abc + c + a$ zu $>$;

aus den 4 ersten Stufen

$bcd + d + b \,..\, abcd + cd + ad + ab + 1$ zu $<$;

aus

$bcde + de + be + bc + 1 \,..\, abcde + cde + ade + abe + e + abc + c + a = a \,..\, b.$

Was aber von dem Verhältnisse $a\,..\,b$ gilt, gilt auch von dem ihm entsprechenden Bruche $\frac{a}{b}$ (S. 327); wenn man also im Stufenbruche $\frac{1}{a} \mathrm{I} \frac{1}{b} \mathrm{I} \frac{1}{c} \mathrm{I} \ldots$ von oben, versteht sich, eine Stufe nimmt, so erhält man einen Bruch, welcher gegen $\frac{a}{b}$ zu $>$; bei der Entwickelung von 2 Stufen $\frac{1}{a} \mathrm{I} \frac{1}{b}$ einen, welcher zu $<$; bei 3 Stufen einen, welcher zu $>$ u. s. f. ins U., in steter Näherung, so dass kein Näherungswerth in kleineren Zahlen dabei übersprungen wird.

Durch diess Verfahren entdeckt man zugleich den grössten gemeinsamen Massstab; wenn daher irgend ein endliches Verhältniss in Zahlen gegeben ist, so findet man, ob es sich in kleineren Zahlen ausdrücken lässt oder nicht; ersteres, wenn der den vorigen theilende Rest eine ganze Zahl > 1, letzteres, wenn man auf die Einheit selbst geräth, auf welche man bei Zahlenverhältnissen immer kommen muss, weil alle ganze Zahlen von der Einheit gemessen werden; zugleich findet man alle Näherungswerthe in kleineren Zahlen.

Ein jeder Bruch, dessen Zähler und Nenner durch einerlei ganze Zahl > 1 gemessen werden, wird durch Division mit dergleichen ganzen Zahlen auf kleinere Benennung gebracht (S. 334); wenn man also Nenner und Zähler durch ihr *grösstes* gemeinsames Mass theilt, auf die kleinste. Nun entdeckt man durch das gezeigte Verfahren das grösste gemeinsame Mass jeder 2 Zahlen, also auch die

kleinste

kleinste Benennung jedes Bruchs in ganzen Zahlen, nebst allen Näherungswerthen in kleineren Zahlen.

Zum Beispiel

sei das Verhältniſs 60 . . 86 in kleinsten Zahlen zu geben; so steht die Untersuchung also:

```
a 60) b 68 (a 1
    a a 60
      α 26) a 60 (b 2
          b α 52
             β 8) α 26 (c 3
                 c β 24
                   γ 2) β 8 (d 4
                       d γ 8
                           0
```

oder kürzer:

```
60) 86 (1
    60
26) 60 (2
    52
 8) 26 (3
    24
 2)  8 (4
     8
     0
```

oder auch:

```
60|86|1
52|60|2
 8|26|3
 8|24|4
 0| 2|
```

Man erhält also dafür folgende Stufe:

$\frac{1}{1} \perp \frac{1}{2} \perp \frac{1}{3} \perp \frac{1}{4}$.

Welcher Stufenbruch, nach S. 347 reducirt, giebt:

	N.	Z.	
	0	1	
	1	0	
1	1	1	I *Stufe* $\frac{1}{1}$ das ist 1 . . 1 $>$ $\frac{30}{43}$ d. i. 30 . . 43
2	3	2	II *Stufen* $\frac{2}{3}$ d. i. 2 . . 3 $<$ $\frac{30}{43}$ d. i. 30 . . 43
3	10	7	III *Stufen* $\frac{7}{10}$ d. i. 7 . . 10 $>$ $\frac{30}{43}$ d. i. 30 . . 43
4	43	30	IV *Stufen* $\frac{30}{43}$ d. i. 30 . . 43 $=$ $\frac{30}{43}$ d. i. 30 . . 43

$$= \frac{2 \cdot 30}{2 \cdot 43} = \frac{60}{86}$$ d. i. 60 . . 86.

Und

Und fragt man nach der kürzesten Benennung des Bruchs $\frac{60}{80}$, so erhält man eben hierdurch $\frac{30}{43}$, und die Näherungsbrüche in kleineren Zahlen $\frac{1}{1} >$, $\frac{2}{3} <$, $\frac{7}{10} >$.

Ein zweites Beispiel

sei die oben S. 127 für 11 . . 29 gefundene Stufe

$\frac{1}{2}$ I $\frac{1}{1}$ I $\frac{1}{1}$ I $\frac{1}{1}$ I $\frac{1}{3}$;

diese reducirt, giebt:

	N.	Z.
	0	1
	1	0
2	2	1
1	3	1
1	5	2
1	8	3
3	29	11

also für den Bruch $\frac{11}{29}$ und das Verh. 11 . . 29 folgende Näherungen:

$\frac{1}{2} >$, $\frac{1}{3} <$, $\frac{2}{5} >$, $\frac{3}{8} <$, $\frac{11}{29}$;

oder geordnet:

$\frac{1}{2} > \frac{2}{5} > \frac{11}{29} > \frac{3}{8} > \frac{1}{3}$.

Daher kann man auch den kleinsten Ausdruck und alle Näherungen in ganzen Zahlen von Verhältnissen finden, deren Glieder gebrochne Zahlen sind. Z. B. $\frac{3}{7}$. . $\frac{5}{4}$ auf ganze Zahlen gebracht durch Reduction auf einerlei Benennung (S. 334) $\frac{12}{28}$. . $\frac{35}{28}$, giebt 12 . . 35; woraus man die Stufe $\frac{1}{2}$ I $\frac{1}{1}$ I $\frac{1}{11}$, und durch deren Reduction die Näherungen $\frac{1}{2} >$, $\frac{1}{3} <$, $\frac{12}{35}$ findet.

Eben so bei gebrochnen Brüchen; soll z. B. der Bruch $\frac{\frac{3}{7}}{\frac{5}{4}}$ auf kleinste Benennung gebracht werden u. s. w., so ist er nach S. 339. c $= \frac{12}{35}$, daher ebenfalls die Näherungswerthe $\frac{1}{2} >$ und $\frac{1}{3} <$.

Wie viel ein für den Bruch $\frac{a}{b}$ gefundener Näherungswerth $\frac{m}{n}$ fehlt, findet man: wenn man $\frac{a}{b}$ und $\frac{m}{n}$ auf einerlei Benennung bringt; also $\frac{an}{bn}$ und $\frac{bm}{bn}$ vergleicht;

gleicht; z. B. $\frac{1}{3} < \frac{12}{35}$, denn $\frac{1}{3} = \frac{35}{3 \cdot 35}$ und $\frac{12}{35} = \frac{36}{3 \cdot 35}$; es ist also $\frac{1}{3}$ um $= \frac{1}{3 \cdot 35} = \frac{1}{105}$ zu klein.

b) Um die Art der Näherung auf eine andere Art zu beurtheilen, wollen wir die Unterschiede der gefundenen Näherungen für den Stufenbruch $\frac{1}{a} \,\mathrm{I}\, \frac{1}{b} \,\mathrm{I}\, \frac{1}{c} \,\mathrm{I}\, \ldots$ aufsuchen und vergleichen. Es ist aber

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{a} \quad \text{I)}$$

$$\frac{1}{a} \,\mathrm{I}\, \frac{1}{b} = \frac{b}{ab+1} \quad \text{II)}$$

$$\frac{1}{a} \,\mathrm{I}\, \frac{1}{b} \,\mathrm{I}\, \frac{1}{c} = \frac{bc+1}{abc+a+c} \quad \text{III)}$$

$$\frac{1}{a} \,\mathrm{I}\, \frac{1}{b} \,\mathrm{I}\, \frac{1}{c} \,\mathrm{I}\, \frac{1}{d} = \frac{bcd+b+d}{abcd+ab+ad+cd+1} \quad \text{IV)}.$$

Also I) und II) auf einerlei Benennung gebracht, giebt $\frac{ba+1}{a(ba+1)}$ und $\frac{ab}{a(ba+1)}$, also I) — II) ist:

$$\frac{ba+1-ab}{a(ba+1)} = + \frac{1}{a(ba+1)}.$$

Aber II) und III) auf einerlei Benennung gebracht, und den Unterschied gesucht, giebt

$$\frac{(abbc+cb+ab)-(abbc+ab+cb+1)}{(ba+1).(abc+c+a)} =$$

$$- \frac{1}{(ba+1).(abc+c+a)}.$$

Woraus das Gesetz deutlich und allgemein einzusehen ist, dass, wenn A = a den Nenner für eine Stufe, B den Nenner für 2 Stufen, C den Nenner für 3 Stufen und so fort bedeutet, $\mathrm{I} - \mathrm{II} = + \frac{1}{AB} = \frac{1}{aB}$; $\mathrm{II} - \mathrm{III} = - \frac{1}{BC}$; $\mathrm{III} - \mathrm{IV} = + \frac{1}{CD}$ u. s. f. ohne Ende.

Daher

Daher kann auch der Werth des Stufenbruches ſelbſt ſo ausgedrückt werden:

$$\frac{1}{A} - \frac{1}{AB} + \frac{1}{BC} - \frac{1}{CD} + \frac{1}{DE} - + \ldots\ldots$$

In dieſer Reihe nehmen die Glieder ins Unendliche ab, weil $A < B < C < D < E$, die Nenner alſo immer zunehmen; weil nun zwiſchen 2 ſolchen Gliedern der wahre Werth des Stufenbruchs inne liegt, dieſe Werthe aber ſich immer näher rücken, ſo folgt ſchon hieraus, daſs man ſich dem wahren Werthe des Stufenbruchs immer mehr nähere; dieſs aber geht aus §. 17, b viel urſprünglicher, unvermittelter und anſchaulicher hervor.

Entwickelt man dieſe Reihe der Differenzen für den Stufenbruch $\frac{\alpha}{a} \mathbin{I} \frac{\beta}{b} \mathbin{I} \frac{\gamma}{c} \mathbin{I} \ldots\ldots$ ſo findet man, wenn A, B, C wieder das ähnliche bedeuten, die Reihe

$$\frac{\alpha}{A} - \frac{\alpha\beta}{AB} + \frac{\alpha\beta\gamma}{BC} - \frac{\alpha\beta\gamma\delta}{CD} + - \ldots\ldots$$

für den Werth des Stufenbruchs ſelbſt. Welches ich hier dem Leſer überlaſſe; den vielfältigen Gebrauch davon aber werde ich im andern Theile einigermaſsen zeigen können.

c) Hierdurch kann man auch jeden Decimalbruch auf einen gemeinen Bruch bringen, der ihm entweder ganz gleich kommt, oder von dem es in kleineren Zahlen, als denen des Decimalbruchs ſelbſt, keinen näheren giebt.

Erſtes Beiſpiel! Der Bruch 0,333.... ſoll auf einen gemeinen Bruch gebracht werden.

333) 1000 (3
999
———
1

weil man hier lauter 9 erhält, ſo iſt dieſs (S. 293.) Beweiſs, daſs $0{,}333 \ldots = \frac{1}{3}$ iſt.

Zwei-

Zweites Beiſpiel! 0,1666. = $\frac{1}{6}$

1666..) 10000 (6
9999..
———
1

(es iſt aber nicht 9998 zu ſetzen, weil 1666.. ins Unendliche läuft).

Drittes Beiſpiel! es ſei 0,2379 zu reduciren.

2379	10000	4
1936	9516	4
443	484	1
410	443	10
33	41	1
32	33	4
1	8	8
	0	

	0	1
	1	0
4	4	1
4	17	4
1	21	5
10	227	54
1	248	59
4	1219	290
8	10000	2379

$\frac{4}{17}$ = 0,2352... fehlt nicht ganz 0,0027

$\frac{5}{21}$ = 0,23809... iſt nicht ganz 0,0002 zu viel.

C.

a) Jedes Verhältniſs, es ſei endlich oder unendlich, der gröſseren oder kleineren Ungleichheit, wird am urſprünglichſten und kürzeſten in den Näherungen, durch Zähler und Nenner eines Stufenbruchs der Form

$$n + \frac{1}{a} \,\mathrm{I}\, \frac{1}{b} \,\mathrm{I}\, \frac{1}{c} \,\mathrm{I}\, \frac{1}{d} \,\mathrm{I} \ldots\ldots$$

(*wo n eine ganze Zahl bedeutet, aber auch o ſein kann*) ausgedrückt, welcher Stufenbruch bei endlichen Verhältniſſen eine endliche, bei unendlichen Verhältniſſen eine unendliche Menge Stufen hat; nimmt man davon eine Stufe, ſo geben deſſen Zähler und Nenner ein zu groſses, nimmt man zwei Stufen, ſo geben dieſe ein zu kleines, drei Stufen ein zu groſses (aber weniger zu groſses) Verhältniſs, als das dadurch auszudrückende, und dieſs in immer ſteigender Näherung; alle gefundne Näherungs-

ver-

verhältniſſe ſind Wurzelverhältniſſe in ganzen Zahlen, und es giebt in kleineren Zahlen keine, welche gleich genau oder noch genauer wären, als die ſind, welche der Stufenbruch in ſich faſst.

Für Verhältniſſe der $<$ Ungl. $\mathfrak{a} \,..\, \mathfrak{b}$, iſt dieſs in dieſem § und §. 17, b ſchon bewieſen; und es iſt nur zu bemerken, daſs bei ihnen $n = 0$ und die Buchſtaben a, b, c, d . . . die vorige Bedeutung, wie in B haben.

Iſt aber ein beliebiges Verhältniſs der $>$ Ungleichheit gegeben, ſo ſeien deſſen Glieder $\mathfrak{c} \,..\, \mathfrak{b}$, alſo $\mathfrak{c} > \mathfrak{b}$; ſo iſt $\mathfrak{c}$ *entweder* einmal $\mathfrak{b}$ oder mehrmal $\mathfrak{b}$, d. i. $n\mathfrak{b}$, dann iſt $\mathfrak{c} \,..\, \mathfrak{b} = n \,..\, 1$; *oder* $\mathfrak{c}$ iſt $= n\mathfrak{b}$ und bleibt ein Reſt; dieſer heiſse $\mathfrak{a}$, ſo iſt $\mathfrak{c} \,..\, \mathfrak{b} = n\mathfrak{b} + \mathfrak{a} \,..\, \mathfrak{b}$; da nun $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$, ſo ſuche für dieſs Verh. der kleineren Ungleichheit den entſprechenden Stufenbruch der Form $\frac{1}{a}$ I $\frac{1}{b}$ I $\frac{1}{c}$ I $\frac{1}{d}$ I, ſo giebt dieſer, reducirt, das Verhältniſs $\mathfrak{a} \,..\, \mathfrak{b}$; da nun $\mathfrak{c} = n\mathfrak{b} + \mathfrak{a}$ und $\mathfrak{c} \,..\, \mathfrak{b} = n\mathfrak{b} + \mathfrak{a} \,..\, \mathfrak{b}$: ſo erhält man dieſen Ausdruck, wenn man die gebrochne Zahl $n + \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}$ findet, denn dieſe iſt (S. 331, 3) $\frac{n\mathfrak{b} + \mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}$; alſo iſt auch $\mathfrak{c} \,..\, \mathfrak{b}$ auf die Form $n + \frac{1}{a}$ I $\frac{1}{b}$ I $\frac{1}{c}$ I . . . gebracht.

(Oder man kehre ein gegebnes Verh. d. $>$ Ungleichheit um, ſo wird es eins der kleineren, und man darf hernach nur den Stufenbruch, und die in ihm gegebnen Näherungen umkehren; man kehrt aber einen Stufenbruch der Form

$\frac{1}{a}$ I $\frac{1}{b}$ I $\frac{1}{c}$ I um, wenn man

ſetzt: $a + \frac{1}{b} \mathrm{I} \frac{1}{c}$; denn $\frac{1}{a} \mathrm{I} \frac{1}{b} = \frac{b}{ab+1}$ aber $a + \frac{1}{b} = \frac{ab+1}{b}$. Die Form

aber $a + \frac{1}{b} \mathrm{I} \frac{1}{c} \mathrm{I} \frac{1}{d} \mathrm{I} \ldots$ iſt gleichbedeutend der:

$$n + \frac{1}{a} \mathrm{I} \frac{1}{b} \mathrm{I} \frac{1}{c} \mathrm{I} \ldots$$

weil hier alle Buchſtaben ganze Zahlen ſind.

Zum Beiſpiele diene 13 .. 5 oder $\frac{13}{5} = 2 + \frac{3}{5} = 2 + \frac{1}{1} \mathrm{I} \frac{1}{1} \mathrm{I} \frac{1}{2}$; letzteres reducirt giebt die Werthe

$2 + \frac{1}{1} = \frac{3}{1} = 3$, d. i. 3 .. 1, zu $>$
$2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ das iſt 5 .. 2, zu $<$
$2 + \frac{3}{5} = \frac{13}{5}$ das iſt 13 .. 5.

Oder man kehre $\frac{13}{5}$ um, nehme $\frac{5}{13}$, ſo erhält man die Stufe $\frac{1}{2} \mathrm{I} \frac{1}{1} \mathrm{I} \frac{1}{1} \mathrm{I} \frac{1}{2}$, und die Näherungen $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{5}{13}$, welche umgekehrt auch geben $\frac{2}{1} = 2$, $\frac{3}{1} = 3$, $\frac{5}{2}$, $\frac{13}{5}$; da aber iſt in der Umkehrung $\frac{2}{1}$ zu $<$ gegen $\frac{13}{5}$, da es wie bewieſen gerade genommen, $\frac{1}{2}$, zu groſs gegen $\frac{5}{13}$.

b) Man kann dieſs auch ſo ausdrücken: jedes Verhältniſs der kleineren Ungleichheit läſst ſich durch die Verkettung der Verhältniſſe

$$1 \,..\, a \;\mathrm{I}\; 1 \,..\, b \;\mathrm{I}\; 1 \,..\, c \;\mathrm{I}\; 1 \,..\, d \;\mathrm{I}\; \ldots\ldots$$

ausdrücken (vergleiche S. 129).

Dieſe Verkettung der Verhältniſſe iſt aber keine Zuſammenſetzung derſelben wie §. 29; und man kann bei dieſen verketteten Verhältniſſen nicht ohne den Werth des ausgedrückten Verhältniſſes zu ändern, unbedingt in allen Stufen ſolche Verhältniſſe ſetzen, welche an ſich betrachtet, einem ſolchen verketteten Verhältniſſe als einzelnem

gleich

gleichbedeutend sind, wie diess aus der aufmerksamen Betrachtung der Verkettung einleuchtet; setzt man z. B. für 1 .. a I 1 .. b, 1 .. a I n .. nb (da n .. nb = 1 .. b, §. 22, S. 173.): so ist $\frac{1}{a} \; \mathrm{I} \; \frac{1}{b} = \frac{b}{ab+1}$, $= \frac{1}{a} \; \mathrm{I} \; \frac{n}{nb} = \frac{nb}{anb+n}$; setzt man aber n .. na I 1 .. b, so erhält man aus $\frac{n}{na} \; \mathrm{I} \; \frac{1}{b}$ den Werth $\frac{nb}{nab+1}$ welcher $< \frac{b}{ab+1}$; denn beiderseits durch n dividirt, erhält man aus $\frac{nb}{nab+1}$ den gleichen Werth $\frac{b}{ab+\frac{1}{n}} < \frac{b}{ab+1}$, weil in $\frac{1}{n}$ n eine ganze Zahl.

c) Je 2 Verhältnisse (oder mehrere) können dadurch vergleichbar gemacht werden, dass man sie auf gleiche Vorderglieder oder auf gleiche Hinterglieder bringt. Auf folgende Art bringt man 2 Verhältnisse a .. b und c .. d

auf gleiche Hinterglieder:

a .. b = ad .. bd (22, S. 173), ebenfalls

c .. d = cb .. db (ebend.); aber auch

cb .. db = cb .. bd (28)

um also a .. b und c .. d zu vergleichen, vergleiche

ad .. bd mit

cb .. bd; so giebt die Zahl welche bd von ad, und die Zahl welche dieselbe bd von der cb ist die deutliche Anschauung der Grösse (17, b) beider Verhältnisse.

auf gleiche Vorderglieder; aus gleichen Gründen ist

a .. b = ac .. bc, auch

c .. d = ca .. cd = ac .. cd; man vergleiche also ac .. bc mit ac .. cd.

z. B. 3 .. 8 und 6 .. 5 giebt 15 .. 40 und 48 .. 40. Vermöge dessen kann man daher die gefundenen Näherungsverhältnisse in Absicht der Gröſse ihrer Näherung würdigen.

D.

Jeder endliche Stufenbruch, er habe eine Gestalt wie er wolle, das ist also $\frac{\alpha}{a} \,\overline{\text{Ɨ}}\, \frac{\beta}{b} \,\overline{\text{Ɨ}}\, \ldots$ kann in einen andern ihm gleichen verwandelt werden, dessen Stufen alle positiv sind und im Zähler 1 haben; das ist in einen der Form

$$n + \frac{1}{a} \,\text{Ɨ}\, \frac{1}{b} \,\text{Ɨ}\, \frac{1}{c} \,\text{Ɨ}\, \ldots$$

Denn jeder läſst sich nach den oben gezeigten Gesetzen reduciren, und in einen gemeinen Bruch verwandeln, welcher gemeine Bruch entweder $<$ oder $>$ als 1 ist; ist er < 1 so kann er auf einen Stufenbruch der Form $\frac{1}{a} \,\text{Ɨ}\, \frac{1}{b} \,\text{Ɨ}\, \frac{1}{c} \ldots$ gebracht werden, und n ist $= 0$. Ist aber der ihm gleiche gemeine Bruch > 1, also sein Zähler $>$ als sein Nenner, so dividire den Zähler $\mathfrak{c}$ durch den Nenner $\mathfrak{b}$, wenn er nun ein nothwendiger Bruch ist, so ist $\mathfrak{c} = n\mathfrak{b} + \mathfrak{a}$; da nun $\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}$, weil $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$, ist $= \frac{1}{a} \,\text{Ɨ}\, \frac{1}{b} \,\text{Ɨ}\, \frac{1}{c} \,\text{Ɨ}\, \ldots$ so ist $\frac{\mathfrak{c}}{\mathfrak{b}} = \frac{n\mathfrak{b} + \mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}$; wenn man nun $n + \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}$ nimmt, so erhält man $\frac{n\mathfrak{b} + \mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}$; also ist wirklich dadurch der Stufenbruch

$\frac{\mathfrak{c}}{\mathfrak{b}}$

$\frac{c}{b}$ auf die Form $n + \frac{a}{b}$, das ist, auf die Form $n + \frac{1}{a} \text{Ɨ} \frac{1}{b} \text{Ɨ} \frac{1}{c} \text{Ɨ} \ldots$ gebracht.

Als *ein Beispiel der ersten Art* sei der Bruch

$\frac{1}{1} \text{Ɨ} \frac{1}{2} \text{Ɨ} \frac{9}{2} \text{Ɨ} \frac{25}{2}$ gegeben,

dieser reducirt giebt $\frac{76}{105}$, welches auf die genannte Form gebracht, giebt:

	0	1	
	1	0	
1	1	1	1
2	3	2	1
2	15	13	9
2	105	76	25

76	105	1
58	76	2
18	29	1
11	18	1
7	11	1
4	7	1
3	4	1
0	1	3

also die Stufen: $\frac{1}{1} \text{Ɨ} \frac{1}{2} \text{Ɨ} \frac{1}{1} \text{Ɨ} \frac{1}{1} \text{Ɨ} \frac{1}{1} \text{Ɨ} \frac{1}{1} \text{Ɨ} \frac{1}{1} \text{Ɨ} \frac{1}{3}$.

Als *ein Beispiel der zweiten Art* diene der Stufenbruch $\frac{11}{2} \text{Ɨ} \frac{3}{4} \text{Ɨ} \frac{7}{5}$.

1) Dieser reducirt giebt:

	0	1	
	1	0	
2	2	11	11
4	11	44	3
5	69	297	7

2) Dieser Bruch $\frac{297}{69}$ umgekehrt und auf die geforderte Form gebracht:

69	297	4
21	276	3
6	21	3
6	18	2
0	3	

giebt die Stufen $\frac{1}{4} \text{Ɨ} \frac{1}{3} \text{Ɨ} \frac{1}{3} \text{Ɨ} \frac{1}{2}$.

Dieſe 3) reducirt: und 4) die Näherungen umgekehrt:

	0	1.	
	1	0	
4	4	1	$\frac{1}{4}$ umgekehrt $\frac{4}{1} = 4$ zu $<$
3	13	3	$\frac{3}{13}$ — — $\frac{13}{3} = 4 + \frac{1}{3}$ zu $>$
3	43	10	$\frac{10}{43}$ — — $\frac{43}{10} = 4 + \frac{3}{10}$ zu $<$
2	99	23	$\frac{23}{99}$ — — $\frac{99}{23} = 4 + \frac{7}{23} = \frac{297}{69}$.

Oder man kann auch ſo verfahren:

$\frac{297}{69}$ iſt $= 4 + \frac{21}{69}$; reducire alſo nun blos $\frac{21}{69}$ auf ſeine Stufen und Näherungen, und addire zu allen Näherungen 4.

$\frac{21}{69}$ giebt die Stufen $\frac{1}{3}$ I $\frac{1}{3}$ I $\frac{1}{2}$; und dieſe reducirt die Näherungen $\frac{1}{3} >$, $\frac{3}{10} <$, $\frac{7}{23} = \frac{21}{69}$.

Alſo ſind die Näherungen an $\frac{297}{69}$

$4 + \frac{1}{3} = \frac{13}{3}$ zu $>$
$4 + \frac{3}{10} = \frac{43}{10}$ zu $<$
$4 + \frac{7}{23} = \frac{99}{23} = \frac{297}{69}$.

Alſo iſt auch der Bruch $\frac{1}{2}$ I $\frac{3}{4}$ I $\frac{7}{5} = \frac{297}{69} =$ $4 + \frac{1}{3}$ I $\frac{1}{3}$ I $\frac{1}{2}$; alſo hier $n = 4$.

Auch kann man dieſs Verfahren ſo anſehen:

$\frac{297}{69}$, Nenner und Zähler durch 69 dividirt giebt den gleichen Werth $\frac{4 + \frac{21}{69}}{1}$; welches $= \frac{4 + \frac{1}{3} \text{ I } \frac{6}{21}}{1} =$ $\frac{4 + \frac{1}{3} \text{ I } \frac{1}{3} \text{ I } \frac{1}{2}}{1} = 4 + \frac{1}{3}$ I $\frac{1}{3}$ I $\frac{1}{2}$ iſt, weil der Nenner $= 1$.

Ob ſich aber alle unendliche Stufenbrüche, und auch ſolche, deren Nenner und Zähler ſelbſt idealiſche Vielheiten

ten ſind, auf dieſe Form reduciren laſſen, davon in der Folge, weil dieſs tiefere Unterſuchungen vorausſetzt.

Ich bemerke hier nur noch, daſs, wenn gleich ein Stufenbruch aus lauter einfachen Brüchen beſteht, und jeder einfache Bruch auf unendlicherlei Art ausgedrückt werden kann (S. 328 u. § 22, 1 c, α u. d, α), man doch im Stufenbruche *unbedingt*, und ohne daſs es die Art der Verkettung geſtattet, nicht dergleichen gleichgeltende Werthe *einzelner* Brüche ſetzen dürfe; ſo z. B. giebt $\frac{1}{1} \mathrm{I} \frac{1}{1}$ etwas anderes als $\frac{2}{2} \mathrm{I} \frac{2}{2}$, erſteres $= \frac{1}{2}$, anderes $= \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

E.

Wenn man daher in die Stelle des Nenners, wie bei allen Zahlen und Vielheiten überhaupt dieſs eigentlich der Fall iſt, den Ausdruck der abſoluten allgemeinen oder beſtimmten Einheit ſetzt, ſo kann man jede beſtimmte Gröſse, als beſtimmte Vielheit der abſoluten Einheit durch einen endlichen Stufenbruch, wenn ſie endlich; durch einen unendlichen aber, wenn ſie unendlich iſt, ausdrücken.

Beſonders iſt dieſe Art der Darſtellung jeder Gröſse als Vielheit der abſoluten Einheit für die Ausdrückung incommenſurabler Gröſsen wichtig, z. B. idealiſcher Wurzeln, Logologen, Logarithmen u. dgl. m.

(So iſt z. B. $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2} \mathrm{I} \frac{1}{2} \mathrm{I} \frac{1}{2} \mathrm{I} \ldots$

$$\sqrt{3} = 1 + \frac{2}{2} \mathrm{I} \frac{2}{2} \mathrm{I} \ldots = 1 + \frac{1}{1} \mathrm{I} \frac{1}{2} \mathrm{I} \frac{1}{1} \mathrm{I} \frac{1}{2} \mathrm{I} \ldots$$

$$\sqrt{n} = 1 + \frac{n-1}{2} \mathrm{I} \frac{n-1}{2} \mathrm{I} \frac{n-1}{2} \mathrm{I} \ldots$$

wovon im andern Theile an ſeinem Orte ausführlicher gehandelt werden wird).

Auſer

Auſer dieſer Art jede Gröſse auszudrücken, haben wir noch eine andere, §. 260, 8 kennen gelernt, die man ganz allgemein auch ſo ausdrücken kann

$$G = \alpha w^{q} + \beta w^{q-1} + \gamma w^{q-2} + \dots\dots\dots$$

da nach der hier gezeigten Art

$$G = \frac{\alpha}{a}\ \mathrm{I}\ \frac{\beta}{b}\ \mathrm{I}\ \frac{\gamma}{c}\ \mathrm{I} \dots\dots$$

wo G jede mögliche Gröſse gegen jede mögliche abſolute Einheit bedeutet.

Beide Arten ſind von gröſster Wichtigkeit für die Fortſetzung der Arithmetik und die Mathematik überhaupt; für die Stufenbrüche führe ich hier nur Eulers Zeugniſs an: „quamquam enim hoc genus (nimirum expreſſionis „infinitae per fractiones continuas) parum adhuc eſt excul„tum, tamen non dubitamus, quin ex eo ampliſſimus „uſus in Analyſin infinitorum aliquando ſit redundaturus. „Inprimis vero ad ipſam Arithmeticam et Algebram com„munem non contemnenda ſubſidia affert iſta ſpecula„tio, cet." *Anal. Inf. ed. II. P. I. p.* 295.

Weil der Stufenbruch $n + \frac{1}{a}\ \mathrm{I}\ \frac{1}{b}\ \mathrm{I}\ \frac{1}{c}$ gleich iſt

$$n + \frac{1}{a} - \frac{1}{AB} + \frac{1}{BC} - \frac{1}{CD} + - \dots\dots$$

und jeder Stufenbruch $\frac{\alpha}{a}\ \mathrm{I}\ \frac{\beta}{b}\ \mathrm{I}\ \frac{\gamma}{c}\ \mathrm{I} \dots$

in einen der Form $n + \frac{1}{a}\ \mathrm{I}\ \frac{1}{b}\ \mathrm{I}\ \frac{1}{c}$ verwandelt werden kann, ſo iſt auch dieſer allgemeine Ausdruck für jede Gröſse hier anzuführen:

$$G = n + \frac{1}{a} - \frac{1}{AB} + \frac{1}{BC} - \frac{1}{CD} + - \dots\dots$$

40.

Jetzt wollen wir noch betrachten, was der Werth eines Bruches ſei, wenn in ihm o, jede beſtimmte Gröſse, und das Unermeſsliche (Unendliche), U, ſelbſt geſetzt wird; welches Zeichen ferner der Bruchgröſse zukomme, wenn im Nenner, Zähler, oder beiden + oder — ſteht.

a) $\frac{o}{o}$ iſt $=$ o, denn es heiſst, die Einheit als o anſehen, und keinmal nehmen. Man könnte aber auch in gewiſſem Sinne behaupten, daſs $\frac{o}{o} = 1$ und jeder endlichen Gröſse wäre. Denn die Gröſse, wogegen die Einheit o iſt, d. i. kein Verh. hat, iſt das Unendliche ſelbſt; und wenn ich hernach auch 1, n, $\frac{n}{m}$, $\frac{p}{q}$ nehme, ſo iſt doch $1 \,.\,.\, U = o \,.\,.\, 1$, $n \,.\,.\, U = o \,.\,.\, 1$; alſo im Zähler doch das gemeinſame Maſs das Unendliche keinmal genommen.

$\frac{o}{n} = o$, denn wenn 1 als n angeſehen wird, ſo iſt das ihr und der Bruchgröſse gemeinſame Maſs eine endliche Gröſse, wovon das Nullfache o ſelbſt iſt.

$\frac{n}{o}$ heiſst: man ſoll dasjenige, wogegen die Einheit o iſt, n-mal nehmen; das iſt das abſolut Unendliche n-mal nehmen, man erhält das U. ſelbſt, indem dieſs nicht mehreremale genommen werden kann; d. i. $n \,.\, U = U$. Daher iſt auch $\frac{1}{o} = U$; welches um ſo weniger zu verwundern, weil, je kleiner der Nenner, je gröſser der Bruchwerth, alſo wenn der Nenner das negative Ideal (o) erreicht hat, der Bruchwerth das poſitive, das U., erreicht haben muſs. Daher iſt auch $\frac{U}{o} = U$; aber $\frac{o}{U} = o$;

denn

denn das, wovon die Einheit das Unermeſsliche iſt, iſt o; dieſs keinmal oder ſovielmal genommen, als man will, iſt und bleibt o. Alſo iſt auch $\frac{n}{U} = 0$. Iſt aber nicht auch $\frac{U}{U} = 0$? Dieſer Bruch iſt 1; denn das, wogegen die Einheit U iſt, iſt o; nun verlangt der Zähler, daſs von o aus dasjenige conſtruirt werden ſoll, was gegen o das Unendliche iſt, dieſs iſt 1, $\frac{n}{p}$, $\frac{p}{p}$, oder vielmehr jede endliche Gröſse überhaupt.

$\frac{U}{n} = U$, denn das, wogegen die Einheit das n-fache iſt, iſt eine beſtimmte Gröſse, deren abſolut Unermeſsliches nur das Unendliche ſelbſt iſt.

Man vergeſſe nicht, daſs hier im ſtrengſten Verſtande unter U das Unermeſsliche, und unter o das Nichts verſtanden werde. Das relativ Unendlichgroſse und Unendlichkleine ſoll in der Folge auch in dieſer Beziehung betrachtet werden.

b) $\frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}$, denn da die Einheit immer poſitiv geſetzt wird, weil ſonſt das Gegentheil angegeben ſein müſste $\left(\text{d. i. } -1 \,.\, \frac{-a}{b}\right)$, ſo iſt auch der b-te Theil der Einheit +, dieſer a-mal, nicht ſo wie er iſt, genommen, giebt alſo ein —.

$\frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$, denn der b-te Theil von 1, nicht ſo genommen als 1 iſt, giebt ein —; dieſs a-mal genommen, wie es iſt, läſst —.

Alſo

Alſo iſt auch $\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$.

$\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$; denn der b-te Theil der 1, nicht ſo genommen als 1 iſt, giebt ein —, und dieſs Negative, a-mal nicht ſo genommen wie es iſt, das iſt: nicht negativ, giebt ein +.

$$\frac{\frac{-n}{m}}{\frac{o}{p}} = \frac{-np}{mo} = -\frac{np}{mo} \text{. u. ſ. w.}$$

41.

Nunmehr kann die Theorie der Multiplication und Diviſion für alle Fälle allgemein ausgedrückt werden. Man erinnere ſich zuförderſt, daſs man jeden Bruch auf doppelte Art n-mal nehmen könne, *indem man den Zähler mit n multiplicirt*, *oder den Nenner mit n dividirt;* ferner, daſs man auch jeden Bruch auf doppelte Art als das n-fache anſehen (durch n dividiren) könne, *wenn man den Zähler durch n dividirt*, *oder den Nenner mit n multiplicirt* (S. 328).

1) *Alle Fälle der Multiplication:*

a) *Ganze Zahlen mit ganzen Zahlen;* a . b = ab z. B. 3 . 7 = 21.

b) *Ganze Zahlen mit gebrochnen;* d. i. $a \cdot \frac{n}{m}$ z. B. $3 \cdot \frac{5}{7}$ heiſst: man ſoll von 3 das $\frac{5}{7}$-fache nehmen, alſo den 7ten Theil von 3, 5mal, d. i. $\frac{3 \cdot 5}{7} = \frac{15}{7}$; daher allgemein

$$a \cdot \frac{n}{m} = \frac{an}{m} = \frac{n}{m : a} = \frac{n}{\frac{m}{a}}.$$

c) *Ge-*

c) *Gebrochne Vielheiten mit ganzen;* das ist $\frac{n}{m} \cdot a$
$= \frac{na}{m} = \frac{n}{m:a}$; z. B. $\frac{3}{5} \cdot 7 = \frac{21}{5}$; $\frac{9}{8} \cdot 4 = \frac{9}{8:4} = \frac{9}{2}$;
$\frac{3}{8} \cdot 12 = \frac{3}{8} \cdot 3 \cdot 4 = \frac{3 \cdot 3}{8:4} = \frac{9}{2}$. Wenn man ganze Zahlen sucht im Nenner und Zähler, so geht nur die Multiplication, nicht immer die Division an.

Da auf die Ordnung der Factoren nichts ankommt, so ist auch $a \cdot \frac{n}{m} = \frac{n}{m:a}$.

Wegen S. 357, f. ist auch $a \cdot \frac{n}{m} = \frac{n}{m} \cdot a = \frac{n}{\frac{m}{a}}$.

d) *Gebrochne Vielheiten mit gebrochnen;* d. i. $\frac{n}{m} \cdot \frac{p}{q}$; z. B. $\frac{8}{9} \cdot \frac{3}{4}$, man soll von $\frac{8}{9}$ das $\frac{3}{4}$-fache nehmen; also muss man *von* $\frac{8}{9}$ *den 4ten Theil suchen*, dieser ist $\frac{8:4}{9} = \frac{2}{9}$ oder auch $\frac{8}{9 \cdot 4} = \frac{8}{36}$; *und davon das 3fache nehmen*, also $\frac{2 \cdot 3}{9}$ oder $\frac{2}{9:3}$; oder $\frac{8 \cdot 3}{36}$ oder $\frac{8}{36:3}$; also allgemein

$$\frac{n}{m} \cdot \frac{p}{q} = \frac{np}{mq} \text{ oder } \frac{np:q}{m} = \frac{\frac{np}{q}}{m} \text{ oder}$$

$$\frac{n:q}{m:p} = \frac{\frac{n}{q}}{\frac{m}{p}} \text{ oder } \frac{(n:q)\,p}{m}.$$

2) *Alle Fälle der Division:*

a) *Gan-*

a) *Ganze Vielheiten mit ganzen Vielheiten;* $a : b = \frac{a}{b}$ (S. 357, f.).

b) *Ganze Vielheiten mit gebrochnen;* $a : \frac{n}{m} = \frac{a}{\frac{n}{m}}$.

Z. B. $6 : \frac{2}{3}$; man soll 6 als das $\frac{2}{3}$-fache ansehen und die Einheit suchen; man nehme also von 6 den 2ten Theil, so hat man den dritten Theil des Quotienten, welchen man also 3mal zu nehmen hat; nun ist 6 als 2 angesehen und die Einheit gesucht $= \frac{6}{2}$, oder $\frac{6 : 2}{1} = \frac{3}{1} = 3$; diess also 3mal giebt $\frac{6 \cdot 3}{2} = \frac{18}{2} = 9 = \frac{6}{\frac{2}{3}}$. *Also um a mit $\frac{n}{m}$ zu dividiren, dividire man a mit n und den Quotient multiplicire man mit m;* also ist

$$a : \frac{n}{m} = \frac{am}{n} \text{ oder } \frac{a}{n : m} = \frac{\frac{a}{n}}{m} \text{ oder } \frac{(a : n)\, m}{1}$$

$$\text{oder } \frac{a : n}{1 : m} = \frac{\frac{a}{n}}{\frac{1}{m}}.$$

c) *Gebrochne Vielheiten mit ganzen;* $\frac{n}{m} : a = \frac{\frac{n}{m}}{a}$ ist gleich $\frac{n}{ma}$ oder $\frac{n : a}{m} = \frac{\frac{n}{a}}{m}$.

d) *Gebrochne Vielheiten mit gebrochnen;* $\frac{n}{m} : \frac{p}{q} = \frac{\frac{n}{m}}{\frac{p}{q}}$ z. B. $\frac{18}{5} : \frac{2}{3}$; man soll die Einheit suchen, wovon $\frac{8}{5}$

das

das $\frac{2}{3}$-fache iſt; es enthält alſo $\frac{8}{5}$ vom Quotienten den 3ten Theil 2-mal; um daher den Quotienten zu finden, dividire man $\frac{8}{5}$ durch 2 und multiplicire dieſen Quotienten durch 3; es iſt aber $\frac{8}{15} : 2 = \frac{8:2}{15}$ d. i. $\frac{4}{15}$ oder $\frac{8}{15 \cdot 2}$ d. i. $\frac{8}{30}$; und $\frac{4}{15} \cdot 3 = \frac{4 \cdot 3}{15}$ d. i. $\frac{12}{15}$ oder $\frac{4}{15:3} = \frac{4}{\frac{15}{3}} = \frac{4}{5}$. Alſo im allgemeinen

$$\frac{n}{m} : \frac{o}{p} = \frac{n:o}{m:p} \text{ oder } \frac{(n:o)\,p}{m} = \frac{\frac{n\,p}{o}}{m}; \text{ ferner}$$

$$\frac{n\,p}{m\,o} \text{ oder } \frac{(n\,p):o}{m}.$$

3) Kommen gebrochne Brüche oder Stufenbrüche als Factoren oder Diviſoren und Dividenden vor, ſo bringe man ſie erſt nach §. 38 auf gemeine Brüche, und verfahre dann nach den angegebnen Geſetzen.

4) Haben Brüche als Factoren oder Diviſoren und Dividenden im Zähler oder Nenner oder beiden + und —, ſo verfahre man nach 39 und 27. So iſt z. B. $\frac{3}{5} \cdot \frac{-2}{3} = \frac{3}{5} \cdot -\frac{2}{3} = \frac{2}{-5}$; und $\frac{-2}{3} : \frac{5}{-7} = -\frac{2}{3} : -\frac{5}{7} = \frac{14}{15}$.

5) Jede Diviſion kann nach S. 148 als Multiplication, und jede Multiplication als Diviſion angeſehen werden; z. B. $\frac{n}{m} \cdot \frac{o}{p} = \frac{n}{m} : \frac{p}{o}$.

In dieſem §. wurden blos die Fälle betrachtet, wo die Factoren, Diviſoren und Dividenden einfache, auch endliche und beſtimmte Gröſsen ſind; im nächſten Satze wollen wir auch die Fälle unterſuchen, wo zuſammengeſetzte Gröſsen, auch U. und o, als Factoren, Diviſoren und Dividenden geſetzt werden.

Fehler, die vor dem Gebrauche zu verbeſſern ſind.

S. 2, 3 v. u. *welcher lieſs welches.* S. 24, 17 v. u. *erblicht l. erblickt.* S. 38, 9 v. u. *ratio l. (ratio.* S. 44, 13 v. u. *n l. m.* S. 52, 13 v. o. ſtreiche aus *b.* S. 58, 4 v. u. iſt mit: *Jede ſtetige . . .* eine neue Zeile anzufangen. S. 59, 15 v. u. *unendliche viele l. unendlichviele.* S. 63, 7 v. o. $a = a$ *l.* $n = a$. S. 65, 4 v. u. *iſt, ſo kann l. iſt* (I, 5, 6), *ſo kann man.* S. 84, 12 v. o. nach *maximum*, ſetze: *oder Kleinſtes, minimum.* S. 92, 12 v. o. *daſſelbe l. Daſſelbe.* S. 93, 2 v. o. $\frac{m}{(n)}$ *l.* $\left(\frac{m}{n}\right)$. Ebendaſ. 1 v. u. *dividiren l. multipliciren.* S. 102, 5 v. o. $\alpha = 3\beta$ *l.* $a = 3\beta$. S. 113, 14 v. o. $b - b$ *l.* $b - \beta$. S. 115, 5 v. o. $b - b$ *l.* $b - \beta$ S. 134, 7 v. o. $bn + 1$ *l.* $b(n + 1)$. S. 145, 15 v. o. α *l.* a S. 146, 6 v. o. *Hinterglied l. Vorderglied.* Ebend. 7 v. o. *Vorder l. Hinter.* S. 149, 7 v. u. *einen ſolchen l. ein ſolches.* S. 154, 5 und 6 v. o. *und a und doch b l, und doch a und b.* S. 155, 14 v. u. m *l.* μ. S. 157, 14 v. u. nach: *muſs M* ſetze: *wenn es nicht* $= \mu$ *oder m.* S. 164, 2 v. o. $\frac{n}{m} \,.\,,\,. \frac{1}{s}$ *l.* $\frac{n}{m} \,.\,,\,. \frac{r}{s}$. S. 171, 9 v. o. $-\alpha \,..\, b + \beta$ *l.* $-\alpha \,..\, b - \beta$. Ebend. 6 v. u. 49 *l.* 47. S. 180, 2 v. o. $a \,.\, b$ *l.* $a \,.\,.\, b$. Ebend. 14 v. o. $\frac{5}{8}$ *l.* $\frac{5}{3}$. S. 182, 2 v. o. *gliedes l. ſatzes.* S. 188, 5 v. o. $= d + \beta$ *l. welches* $= d + \beta$. S. 189, 9 v. o. 7 *l.* 8. S. 190, 3 v. o. 8 *l.* 9. S. 193, 12 v. o. nach: *individuellen* ſetze: *oder allgemeinen.* S. 203, 16 v. o. 3 . . 6 *l.* 6 . . 6. S. 205, 5 v. o. β *l.* γ. S. 207, 3 v. o. $< >$ *l.* $> <$. S. 208, 10 v. o. 3 *l.* 2. S. 210, 10 v. u. $a \mp a$ *l.* $a \mp \alpha$, ſo auch Zeile 12 und 13 v. u. S. 211, 7 v. u. *eine l. eine durch.* S. 214, 12 v. u. *a und d l. b und d.* S. 218, 2 v. o. . . 12 (*l.* $=$ (20 . . 12. S. 222, 2 v. o. *cc l. bd*, 3 v. o. $c + c$ *l.* $d + d$. S. 225, 9 v. o. (13*b*) − *l.* (13*b*) +. S. 236, 4 v. u. 16 . . 2 *l.* 16 : 2.

S.

S. 251, 15 v. o. *ſind:* *l.* *ſind: Fig.* 63. S. 260, 13 v. o. *Potenzen l. Potenzen von demſelben oder* S. 262, 9 v. o. $\left.\frac{n}{m}\right)^q$ *l.* $\left.\frac{n}{m}\right)^p$. S. 262, 1 v. u. *verſtattet l. und N verſtattet*, 6 v. u. $p - 1$-*te l.* p-*te.* S. 271, 4 v. u. *Zeit l. Zeit und der Winkel.* S. 294, 9 v. u. $\frac{3}{19}$ *l.* $\frac{1}{19}$, 13 v. u. 0,16. *l.* $0{,}1\overset{*}{6}$. S. 301, 14 v. o. $1 + p$ *l.* $1 \mp p$. S. 312, 16 v. u. *giebt l. der Ungleichheit giebt.* S. 319, 1 v. o. $\mp b$ l. $\mp d$. S. 323, 15 v. o. 4 *l.* 5. S. 324, 7 v. o. 2 *l.* 1. S. 327, 6 v. o. $v : v$ *l.* $: v$. S. 331, 4 v. u. *zufällig l. nicht zufällig.* S. 339, 5 v. u. $\left(\frac{1}{b} : b\right)$ *l.* $\left(\frac{1}{c} : b\right)$. S. 342, 9 v. o. $\frac{2}{2}$ *l.* $\frac{2}{3}$, 12 v. o. $\frac{2}{3}$ I $\frac{2}{3}$ *l.* $\frac{2}{3}$ I $\frac{2}{7}$. S. 348, 7 v. o. 15 *l.* 16, 8 v. o. 52 *l.* 55. S. 304, 9 v. o. $a \ldots 1 . 3$ *l.* $(a \ldots 1) . 3$.

Anmerkung.

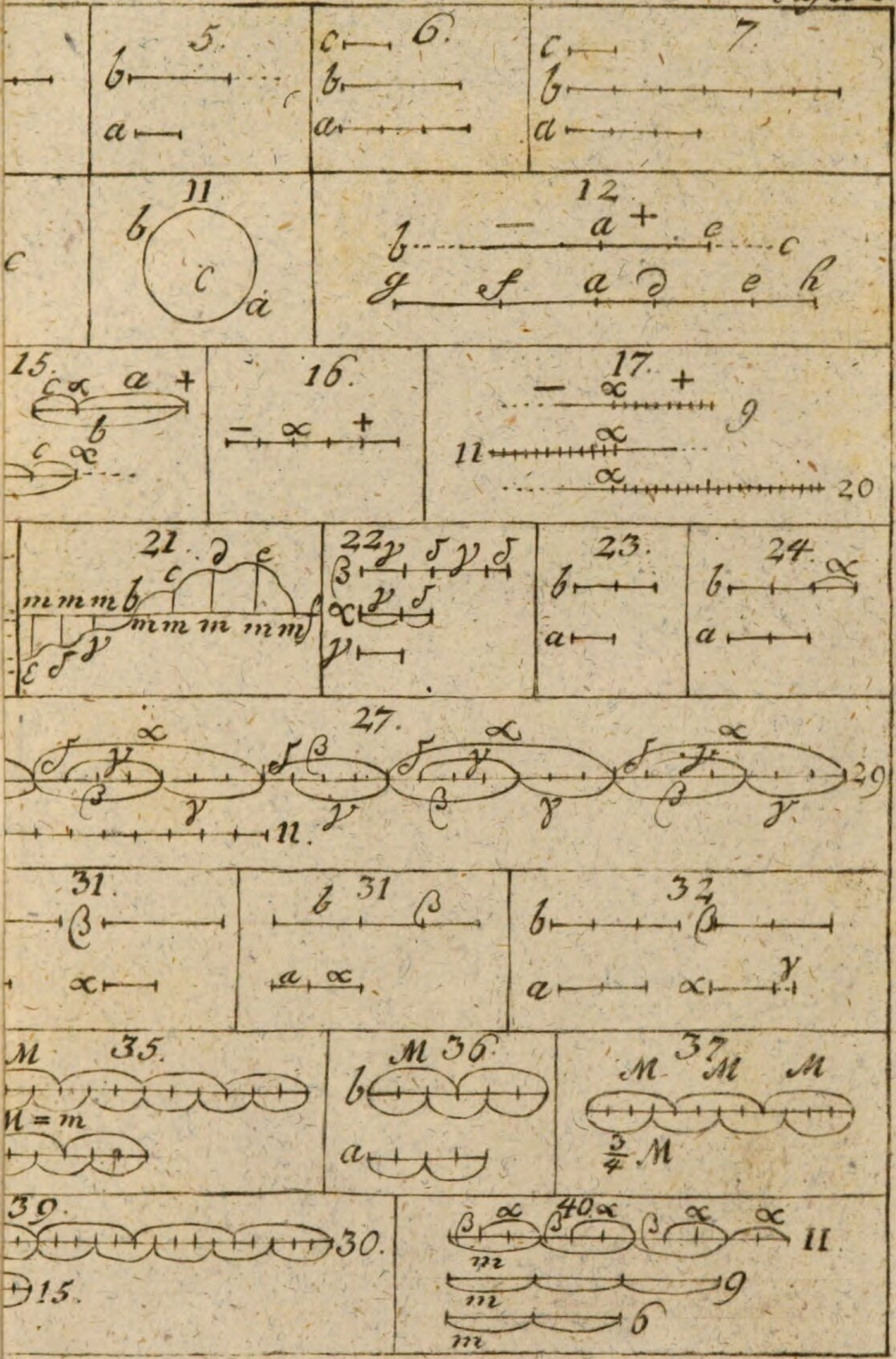
$\left.\frac{n}{m}\right)^p$ und $\left(\frac{n}{m}\right)^p$ bedeuten das Gleiche.

Nachricht an den Buchbinder.

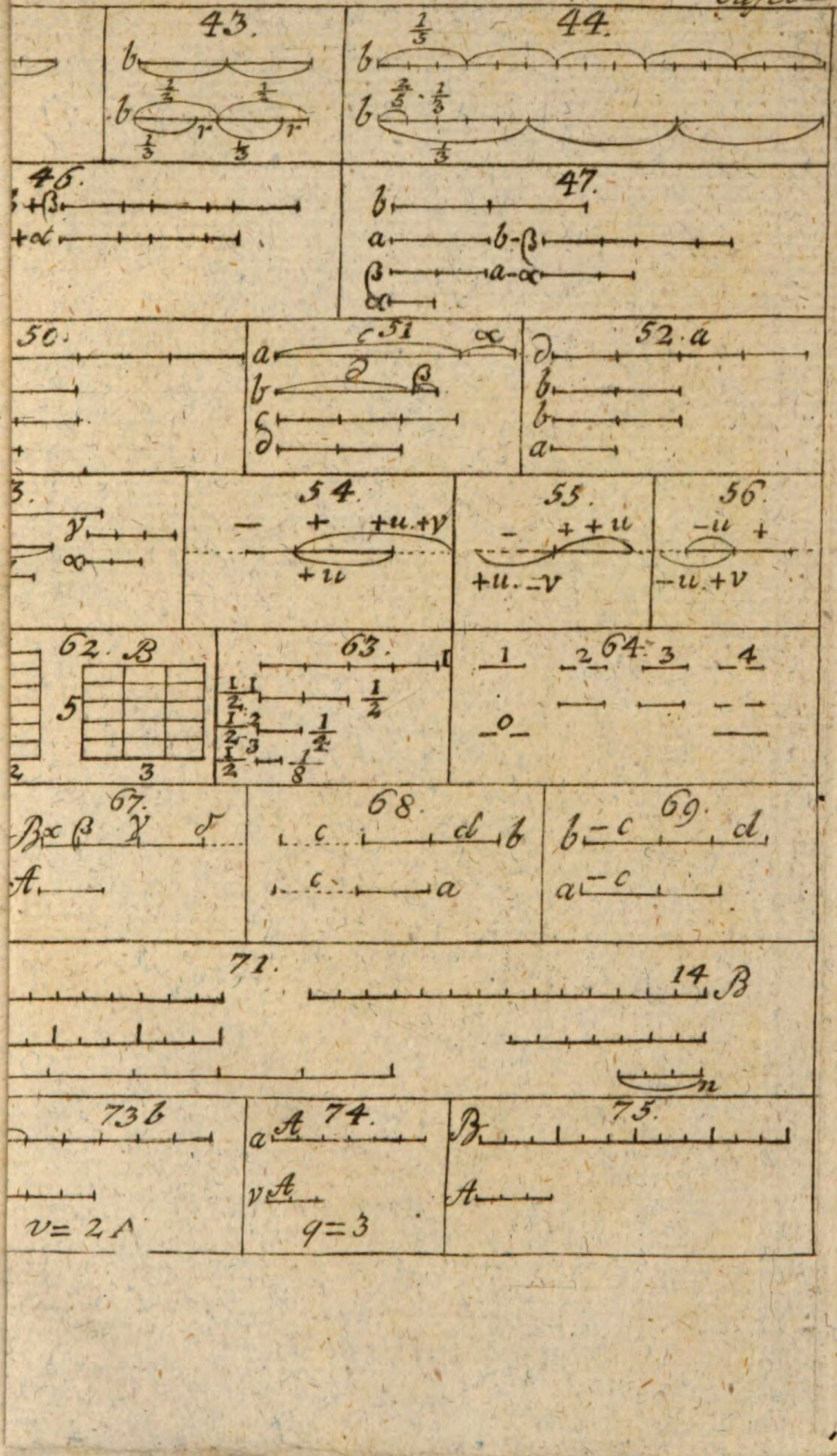
Die beiden Kupfertafeln müſſen zu Ende des Werks ſo eingefügt werden, daſs man ſie ganz beim Leſen herausſchlagen kann.

Bayerische Staatsbibliothek München

Tafel I.


5.
b
a
6.
c
b
a
7.
c
b
a
11
b
c
a
12
b
a
c
g f a d e h
15.
16.
17.
11
9
20
21
22
23.
24.
27.
29
11.
31.
31
32
35.
36
37
39.
30.
15.
40
11
9
6

Tafel II.


43.
44.
46.
47.
50.
51
52. a
54.
55.
56.
62. B
63.
64.
67.
68
69.
71.
14 B
73 b
74.
75.
v = 2 A
q = 3

XX VII.86

Krause, Karl Christian Friedrich,

Grundlage eines philosophischen Systems der Mathematik

Jena u.a. 1804

Math.p. 258
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082169-8